*

Determinisme og Frihet

Noen logiske betraktninger

*

Morten Rognes

1993

*

"At alt skjer ut fra en fastsatt skjebne, er like sikkert som at tre ganger tre er ni. For skjebne består i dette, at alt henger sammen som i en kjede, og vil like uavvendelig komme til å hende før det hender som at det uavvendelig har hendt etter at det hender ... Alt utvikler seg matematisk, dvs. uavvendelig, overalt i verden, slik at om noen hadde hatt tilstrekkelig innsikt i tingenes indre og dessuten hadde hatt god nok hukommelse og intelligens til å overskue alle omstendigheter og ta dem med i beregningen, ville han være en profet som ville kunne se fremtiden i nåtiden som i et speil. "

(Leibniz)

INNHOLD

§1 Innledning. 6
§1.1 Forkunnskaper 6
§1.2 Mål, metode og resultater. 6
§2 Innledende betraktninger. 8
§3 Fremstilling av hovedtrekkene i teorien. 9
§4 Viktige definisjoner i teorien E;3+ 16
§5 Endel elementære satser i teorien E;3+ 18
§6 Begrepet tilstands-struktur 23
§7 Om hendelser og hendelsesbegrepet. 26
§8 Om determinisme og deterministiske teorier 27
§8.1 Definisjoner av predikatene "Δ er en deterministisk teori i verdenen w" og "Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a" 28
§8.2 Definisjon av predikatet "Δ er en deterministisk teori" 32
§8.3 Definisjon av predikatet "Δ er en deterministisk teori i verdenen w relativt til tidspunktet t". 36
§8.4 Definisjon av predikatet "Δ er en strengt deterministisk teori" 37

§8.5 Om sammenhengen mellom de forskjellige determinismebegrepene som har blitt innført. 37
§8.6 Om motsigelsesfriheten til den påstand at det finnes strengt deterministiske teorier. 42
§9 Deterministiske teorier og muligheten av verdensforløp som forgrener seg. 45
§10 Et teorem om strengt deterministiske teorier. 49
§11 Prinsippet om at alt har en årsak og spørsmålet om determinisme. 51
§12 Determinisme og frihet. Er den tanke at alt er determinert forenelig med den tanke at mennesket kan velge fritt ? 55
§13 Definisjoner av frihet. 55
§13.1 Definisjon 1 av frihet. 59
§13.2 Definisjon 2 av frihet. 60
§13.3 Definisjon 3 av frihet. 61
§13.4 Definisjon 4 av frihet. 62
§14 Tilleggspremisser. 64
§14.1 Setningen C1 65
§14.2 Setningen C2 67
§14.3 Setningen C3 69

§14.4 Setningen C4 70
§14.5 Setningen C5 73
§15 Om inkompatibilitet mellom determinisme og frihet. Ni teser. 76
§16 Om setningene C1- C5 og Moores analyse av "kunne". 88
§17 Ytterligere refleksjoner over den mulige uforenelighet mellom determinisme og frihet. 92
§18 Generaliseringer av en del begrepsdannelser. 94
§19 Oppsummering og konklusjon. 100

Kråkerøy 31-8-94

FORORD

Det følgende skrift ble påbegynt høsten 1992 og gjort foreløpig ferdig i august 1994. Det er ikke skrevet for offentliggjørelse og forfatteren har heller ikke til hensikt å gjøre noe for at det skal bli offentliggjort. Enhver som får et eksemplar av dette skrift eller en kopi av det i hende, og som ikke har fått forfatterens uttrykkelige skriftelige tillatelse til å oppbevare eksemplaret, bør derfor hurtigst mulig returnere det. Det er under alle omstendigheter mot forfatterens ønske og vilje at man i noen form for skriftelige arbeider, publiserte eller upubliserte, henviser til dette arbeid, eller siterer deler fra det, uten på forhånd å ha innhentet forfatterens tillatelse.

Morten Rognes

§1 Innledning.

§1.1 Forkunnskaper

Teorien vi skal gi en fremstilling av her er en utvidelse av egenskaps-teorien E;3 som er formulert i Rognes [4]. Denne egenskaps-teorien er i sin tur en utvidelse av en teori om utsagn som er gitt i Rognes [3]. Begge disse arbeidene bygger på Rognes [1] og Rognes [2] hvor den logiske og mengdeteoretiske nota-sjon vi benytter blir innført helt presist. *I det følgende forutsettes det at leseren er fullt fortrolig med de skrifter som er nevnt og har satt seg inn i dem.* Den notasjon og de begrepsdannelser som er innført i de nevnte verk vil derfor bli brukt uten videre og uten at vi her rekapitulerer og på ny motiverer tidligere definisjoner. Vi gjør dette fordi det neppe kan ha noen spesiell hensikt at det er stor overlapping mellom flere av våre arbeider, men også fordi vi ikke vil trette leseren med detaljer som vi har gjort nøye rede for andre steder. Når det gjelder den notasjon av logisk og mengdeteoretisk art som benyttes i dette skrift er den delvis forklart Appendix I. Ytterligere opplysninger som trengs får man i Rognes [1]. *Vi anbefaler at leseren kopierer dette appendiks og har det oppslått ved gjennomlesningen av dette arbeid.* Det vil da være adskillig lettere å få tak i betydningen til et symbol som man støter på, og som man med en gang ikke skjønner betydningen til, enn om man stadig skal slå opp.

§1.2 Mål, metode og resultater.

Determinisme kan sies å være det synspunkt at alt som skjer er bestemt i overen-stemmelse med strenge naturlover. Et problem som oppstår er om dette synspunkt logisk sett er forenelig med den påstand at mennesket er fritt. Det er dette forenelighetsproblem som vi hovedsakelig skal drøfte i dette arbeidet.

La oss kalle setningen "Alt som skjer er bestemt i overenstemmelse med strenge naturlover." for D og la oss kalle setningen "Minst en person kan velge fritt ved et eller annet tidspunkt" for F. Spørsmålet er da om setningen D er logisk sett forenelig med setningen F. Dette spørsmål er neppe så lett å besvare om man ikke forsøker å klargjøre ytterligere innholdet i de to setningene. La oss forkorte konstrukjonen "Alt som skjer i den logisk mulige verden w er bestemt i overensstemmelse med strenge naturlover" med uttrykket "D(w)" og la oss forkorte predikatkonstruksjonen "x er en person som kan velge fritt ved tidspunktet t i den logisk mulige verden w" med "Fri(x,t,w)". La oss tilslutt bruke "a;0" som forkortelse for termen "den verden som faktisk foreligger realisert". [1] Setningen D uttrykker da at D(a;0), dvs. at alt som skjer i den verden som faktisk foreligger realisert er bestemt i overensstemmelse med strenge naturlover. Setningen F, som sier at minst en person kan velge fritt ved et eller annet tidspunkt i den verden som foreligger realisert, kan uttrykkes konsist ved den følgende formel: (Ex)(Et)(Fri(x,t,a;0)). Det problem som vi stiller kan da formuleres slik: Er setningen D(a;0) logisk sett forenelig med setningen (Ex)(Et)(Fri(x,t,a;0))?

Dette spørsmålet kan imidlertid neppe behandles på noen særlig opplysende måte om man ikke forsøker å definere predikatene "D(w)" og "Fri(x,t,w)". Dette er noe av det som vil bli gjort i dette arbeidet. Vi vil betrakte en rekke mulige eksplikasjoner de to nevnte predikater innenfor rammen av en presist formulert første-ordens teori som vi vil kalle DF.

La oss på dette punkt si noen ord om denne teorien DF. DF er en utvidelse av første-ordens teorien E;3 om egenskaper, utsagn og mulige verdener som er definert og undersøkt i våre arbeider "Egenskaper Del I" og "Egenskaper Del II. Bevis for teoremer.". La oss her

---

[1] Med en n-ær konstruksjon forstår vi en funksjon som til ethvert n-tuple av uttrykk tilordner et uttrykk.

bemerke at teorien E;3 i sin tur er en utvidelse av det mengde-teoretiske systemet ZFCu som idet vesentlige er Zermelo-Fraenkel-systemet for mengdelære, men modifisert slik at det tillater eksistensen av såkalte urindivider. Vi vil gi en presis definisjon av endel av teorien DF i §3. Den vil så bli definert fullstendig i §12. Språket til teorien DF kaller vi L(DF).

Vi vender nå tilbake til spørsmålet om definisjoner av predikatet "D(w)". Dette predikatet er naturligvis temmelig uklart. Det kan derfor presiseres i en rekke forskjellige retninger. Ved hjelp av predikatene i det ikke-logiske vokubularet i L(DF) gir vi helt eksplisitte definisjoner av de følgende uttrykk: (i) "Δ er en deterministisk teori verdenen w", (ii) "Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a", (iii) "Δ er en deterministisk teori", (iv) " Δ er en deterministisk teori i verdenen w relativt til tidspunktet t", (v) "Δ er en strengt deterministisk teori" og (vi) "Δ er en svakt deterministisk teori i verdenen w". Dette skjer i detalj i §8 hvor vi gir og motiverer definisjonene. Ved hjelp av disse definerte predikatene kan så predikatet, D(w), "w er en mulig verden hvor alt som skjer er bestemt i overenstemmelse med strenge naturlover" presiseres i minst seks forskjellige retninger. Man kan med "D(w)" mene det samme som "Det finnes en utsagnsmengde Δ som er en deterministisk teori i verdenen w". Eller man kan med "D(w)" mene det samme som med uttrykket "Det finnes en utsagnsmengde Δ og et reelt tall a>0 slik at Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a". Videre kan man med "D(w)" mene det samme som "Det finnes en utsagnsmengde Δ hvor alle utsagnene er sanne i verdenen w og hvor Δ er en deterministisk teori". Det er også tre andre muligheter om vi holder oss til listen ovenfor: "D(w)" kan presiseres i retning av "Det finnes en utsagnsmengde Δ hvor alle utsagnene er sanne i verdenen w og hvor Δ er en strengt deterministisk teori". Eller det kan presiseres i retning av "Det finnes en utsagnsmengde som er en deterministisk teori i w relativt til et eller annet tidspunkt". Endelig kan uttrykket presiseres i retning av "Det finnes en utsagnsmengde som er en svakt deterministisk teori i w".

Hvis man ønsker å diskutere spørsmålet om foreneligheten av determinisme og frihet etter de retningslinjer som er gitt ovenfor er det imidlertid også nødvendig å presisere meningsinnholdet til predikatet "Fri(x,t,w)", "x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w" innenfor rammen av språket L(DF). Dette blir gjort i §13. Vi drøfter her fire mulige definisjoner av dette predikatet slik at det får en presis mening innenfor rammen av teorien DF.

Tenker man seg at "I" betegner klassen av mulige verdener og ê betegner medlemskapsrelasjonen kan den logiske forenelighet mellom det utsagn at alt som skjer er bestemt i overensstemmelse med strenge naturlover og det utsagn at minst en person ved et eller annet tidspunkt kan velge fritt uttrykkes ved den følgende formel:

(1) (Ew)(wêI & D(w) & (Ex)(Et)(Fri(x,t,w)))

Negasjonen av denne tese – at determinisme er uforenelig med frihet – kan uttrykkes ved:

(2) (Aw)(wêI->(D(w) -> ¬(Ex)(Et)(Fri(x,t,w))))

De forskjellige definiensuttrykk i de seks definisjonene vi nevnte ovenfor av predikatet "D(w)" og de tilsvarende definiensuttrykk i de fire definisjonene vi nevnte i forbindelse med predikatet "Fri(x,t,w)" er alle formler i språket til teorien DF, L(DF). Tenker vi oss derfor at vi velger ut en av de seks definisjonene av "D(w)" og en av de fire definisjonene av "Fri(x,t,w)" og benytter dem i forbindelse med (1) og (2), vil disse to tesene kunne omformes til formler i L(DF).

På basis av de aksiomer som inngår i teorien DF, slik vi definerer den i §3 og §13, viser det seg imidlertid at man i denne teorien hverken kan bevise (2) eller negasjonen av (2) uansett hvordan denne presiseres på basis av de definisjonene vi nevnte ovenfor. Spørsmålet oppstår derfor om man kan formulere noen plausible setninger i L(DF) som sammen med de øvrige ikke-logiske aksiomene i DF impliserer noen av de presiseringer vi har antydet av (2). I §14 formulerer vi en rekke setninger, hvorav de viktigste er C1 - C5 som muligens kan tas i betraktning i denne forbindelse. I denne paragrafen forsøker vi også å klargjøre de viktigste

logiske implikasjonsforholdene mellom disse setningene som kan vises innenfor rammen av teorien DF.

I §15 formulerer og beviser vi en rekke setninger i teorien DF om inkompatibiltet mellom frihet og determinisme. Disse teoremene utgjør de hovedresultatene i dette arbeid og kaster lys over hvilke av presiseringene av inkompatibilitets-tesen (2) som holder alt ettersom hvilke av setningene C1 - C5 man aksepterer.

§2 Innledende betraktninger.

La oss i det følgende tenke oss at det finnes flere logisk mulige verdener og la oss betegne den av disse som faktisk foreligger med "Akt". Akt vil altså være den aktuelle verden. La oss også forutsette det finnes en mengde med tidspunkter og at et tidspunkt kan komme før et annet. Vi betegner relasjonen "kommer før" mellom tidspunkter med "<". Klassen av alle tidspunkter vil vi betegne med T. Vi skal dessuten forutsette at < er en lineær, tett og kontinuerlig relasjon over T. Videre tenker vi oss at det for ethvert tidspunkt alltid finnes et som kommer etter og et som kommer før. Er t og t' to tidspunkter betyr " t<t' " at tidspunktet t kommer før tidspunktet t'.

Det synes intuitivt rimelig å si at verden ved det nuværende tidspunkt, la oss kalle det "t;0", er i en bestemt totaltilstand. Skulle man beskrive denne totaltilstand er det tilsynelatende ikke urimelig å si at man i prinsippet måtte angi alle de gjenstander som eksisterer ved det nuværende tidspunkt, videre hvilke egenskaper disse har, og alle de relasjoner som består mellom hvert enkelt av dem. I praksis er dette umulig med en så omfattende helhet, men det synes ikke å være noe logisk sett, eller teoretisk sett, i veien for å anta at en slik totalbeskrivelse, og derfor en slik totaltilstand, skulle finnes. La oss nå tenke oss at t' f. eks. er det tidspunktet som kommer ti minutter etter det nuværende tidspunkt, dvs. t;0. Ved dette tidspunkt vil verden være i en annen totaltilstand fordi det vil ha skjedd en rekke forandringer i dette tidsrom: En bil som nå befant seg på veien nedenfor vil ha tilbakelagt en strekning på flere kilometer, et tog som nå er iferd med å starte vil om ti minutter være kommet godt i gang, et par som nå sa farvel til hverandre vil ved t' ikke lenger være innen hverandres synsvidde og kan bare tenke tilbake på hverandre. Det synes derfor naturlig å si at ved ethvert fremtidig tidspunkt t , ethvert tidspunkt som kommer etter tidspunktet t;0, vil verden, den aktuelle verden befinne seg i en bestemt totaltilstand. Tilsvarende for ethvert tidspunkt t som kommer før det nuværende tidspunkt.

Er t et tidspunkt skal vi la uttrykket "Tot(t,Akt)" betegne den totaltilstanden som den aktuelle verden befinner seg i ved tidspunktet t. Sagt litt anderledes betegner uttrykket "Tot(t,Akt)" den totaltilstanden som foreligger realisert ved tidspunktet t i den aktuelle verden. Uttrykket kan leses "Den totaltilstanden som foreligger realisert i den aktuelle verden ved tidspunktet t ". Hvis det vi har antydet ovenfor er riktig skulle det altså teoretisk sett finnes en funksjon som til ethvert tidspunkt t tilordner den totaltilstand som den aktuelle verden befinner seg i ved tidspunktet t, mao. Tot(t,Akt).

Vi sa ovenfor at vi tenkte oss at det eksisterte andre mulige verdener en den aktuelle verden. Hvis vi tenkte oss at vi kjente fullstendig funksjonen F=Mg(<t,Tot(t,Akt)>: têT), mao. den funksjonen som til ethvert tidspunkt tilordner den totaltilstand som den aktuelle verden befinner seg i ved dette tidspunkt ville vi naturligvis ha hatt en guddommelig oversikt over absolutt alle de hendelser som har inntruffet fra uendelig langt bakover i tiden og alle de hendelser som vil inntreffe innover i fremtiden. Vi ville ha hatt en fullstendig oversikt over verdenshistorien fra de tidligste tider og så langt inn i fremtiden som man overhodet kan tenke seg. La nå t være et tidspunkt. Det virker da ikke urimelig å tenke seg et hendelsesforløp som finner sted etter tidspunktet t og som avviker noe fra det som fra det

som faktisk finner sted i den aktuelle verden. I så fall synes det naturlig å si at det skulle finnes en mulig verden hvor alle de totaltilstander som foreligger realisert tidspunkt for tidspunkt opp til tidspunktet t er identiske med dem som foreligger realisert i den aktuelle verden , men hvor vi kan tenke oss at verdensforløpet etter t aviker helt fra det i den aktuelle verden. Faktisk synes det ikke umulig å tenke seg et helt kontinuum av slike verdener.

Er w en eller annen mulig verden og t et eller annet tidspunkt betegner vi den totale verdenstilstand som foreligger realisert i verdenen w ved tidspunktet t med "Tot(t,w)". Det vi nevnte rett ovenfor innebærer derfor at det til ethvert tidspunkt t skulle kunne finnes en mulig verden w hvor vi har (1) Tot(t',w) = Tot(t',Akt) for alle tidspunkter t' som kommer før , eller er lik t, men hvor (2) Tot(t",w) ≠ Tot(t",Akt) for en rekke tidspunkter t" som kommer etter tidspunktet t.

La oss betegne klassen av alle mulige verdener med I. Man erindrer at T betegnet klassen av alle mulige tidspunkter. Man kan da spørre om det er slik at enhver mulig verden befinner seg i en bestemt totaltilstand ved ethvert mulig tidspunkt, eller om dette bare gjelder en del mulige verdener. Ved første øyekast virker det naturligvis vanskelig å si hva man skal svare på et slikt spørsmål. Men det mest nærliggende er muligens å svare bekreftende ut fra systematiske og helhetlige betraktninger, fordi dette synes å lede til den enkleste teori. Skulle man anta at det fantes en verden w og et tidspunkt t der det ikke foreligger realisert noen totaltilstand i w ved tidspunktet t ville funksjonen Tot(t,w) måtte oppfattes som udefinert for visse verdier. Det synes i så fall enklere å tenke seg den definert for alle elementer i Prod(T,I). Eventuelt kunne man innføre en nulltilstand som man kunne tilordne de par <t,w> hvor det er slik at det ikke finnes noen bestemt totaltilstand som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w.

§3 Fremstilling av hovedtrekkene i teorien.

Vi skal nå stanse opp og formalisere de litt løse betraktningene vi har fremlagt ovenfor. Vi utvider språket L(E;3), språket til teorien E;3 med de følgende nye ikke-logiske primitive predikater:

(i) "x er et tidspunkt".
Dette forkorter vi med "Tp(x)".

(ii) " x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y".
Denne konstruksjonen skal vi forkorte med "x<y".

(iii) " w er den aktuelle verden ".
Dette predikatet forkorter vi med "Aktuell(w)"

(iv) " x er en totaltilstand som foreligger realisert i verdenen w ved tidspunktet t"
Denne konstruksjonen forkorter vi med "TL(x,w,t)".

(v) " x er en kausallov som gjelder i verdenen w"
Denne konstruksjonen forkorter vi med "CLov(x,w)"

(vi) "x er et reelt tall som angir avstanden mellom tidspunktet t;1 og tidspunktet t;2 "
Denne konstruksjonen forkorter vi med: "Dist(x,t;1,t;2)"

For å formalisere våre betraktninger ovenfor trenger vi ikke å innføre andre konstruksjoner enn disse. Vi kaller det første-ordensspråket vi får når språket til E;3, dvs. L(E;3) utvides med disse predikatene for L;+(E;3). Teorien E;3 med språket utvidet til L;+(E;3) og klassen av de ikke-logiske aksiomene utvidet med alle nye instanser av replacement-aksiomskjemaet

og utsondrings-aksiomskjemaet i L;+(E;3) kaller vi E;3+. I første omgang skal vi ikke legge til grunn noen sterkere teori enn denne.

Klassen av tidspunkter, som vi betegnet med T, kan nå defineres ved T =;d Mg(x: Tp(x)). Vi gjør oppmerksom på at vi bruker uttrykkene "t", "t'", "t"", ... etc. som variabler som tar tidspunkter som verdier. Vi definerer uttrykket "den aktuelle verden", ie. "Akt" ved Akt =;d (ix)(Aktuell(x)). Det kan synes overflødig å gjøre dette, men vi gjør oppmerksom på at det i språket L;+(E;3) bare inngår predikater som primitive, ikke-logiske, uttrykk ved siden av de logiske konstruksjonene. Uttrykket "den aktuelle verden" er en singulær term, og ikke et predikat; derfor må det formelt sett defineres. Dette er hermed gjort.

Vi skal anta at T er en mengde som eksisterer i det kumulative hierarki mao. at :

(T1) Mng(T).

Merk at setningen "Mng(T)" ikke kan utledes i E;3 alene. Den er uavhengig av E;3. Leseren kan selv på egenhånd gi et bevis for dette.

Vi innførte uttrykket "Tot(t,w)" som forkortelse for uttrykket " den totaltilstanden som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w". Også dette uttrykket er en singulær term og foreligger følgelig ikke blandt de primitive konstruksjonene i L;+(E;3). Det må derfor defineres og den opplagte definisjon av uttrykket er : Tot(t,w) =;d (ix)(TL(x,w,t)).

Ovenfor ble det nevnt at vi antok relasjonen < var en relasjon mellom tidspunkter. Dette kan rent formelt uttrykkes slik:

(T2) (Ax)(Ay)(x<y ->. Tp(x)&Tp(y))

Det ble også nevnt at at vi antok at relasjonen "kommer før" mellom tidspunktene var en lineær, tett og kontinuerlig relasjon som er slik at det til ethvert vilkårlig valgt tidspunkt t alltid finnes et tidspunkt som kommer etter t og et tidspunkt som kommer før t.

Disse fire antagelsene kan formaliseres slik:

(T3) (Ax)(Tp(x) .->.¬ (x<x))
(Ax)(Ay)(x<y. ->. ¬(y<x))
(Ax)(Ay)(Tp(x) & Tp(y).->. x<y v x=y v y<x)
(Ax)(Ay)(Az)(x<y & y<z . ->. x<z)

De fire formlene uttrykker, som man ser, at før-relasjonen er irrefleksiv, antisymmetrisk, sammenhengende og transitiv, mao. at det dreier seg om en lineær relasjon.

At før-relasjonen er tett innebærer at det mellom to vilkårlig valgte distinkte tidspunkter alltid kan skytes inn et tidspunkt. Den følgende formel uttrykker dette:

(T4) (Ax)(Ay)(x<y. ->.(Ez)(Tp(z) & x<z & z<y))

Anta x er en mengde av tidspunkter. La y være et tidspunkt. Vi sier da at y er en øvre grense for mengden x hvis og bare hvis vi har

(Az)(zêx.->.z<y v x=y).

La oss bruke "LimØ(x,y)" som forkortelse for " y er en øvre grense for x". Anta igjen at x er en mengde med tidspunkter og at y er et tidspunkt. Da sier vi at y er en minste øvre grense for x om y kommer før eller er identisk med alle tidspunkter z som er øvre grenser for x. Bruker vi "Sup(x,y)" for
" y er en minste øvre grense for x" kan denne definisjonen formaliseres slik:

Sup(x,y) <-> (Az)(LimØ(x,z).->. y<z v y=z)

Helt tilsvarende sier vi y er en nedre grense for x, der x er en mengde med tidspunkter, og y er et tidspunkt, hvis og bare hvis vi har:

(Az)(zêx.->. z>y v z=y).

Vi bruker uttrykket "LimN(x,y)" som forkortelse for "y er en nedre grense for x". Videre brukes uttrykket "Inf(x,y)" som forkortelse for " y er en største nedre grense for mengden x". Dette siste uttrykket defineres slik:

Inf(x,y) <-> (Az)(LimN(x,z).->. y>z v y=z).

Vi nevnte ovenfor at vi tenkte oss at relasjonen < over klassen av tidspunkter var kontinuerlig. Dette innebærer at en hvilken som helst mengde av tidspunkter som har en øvre grense, har en minste øvre grense, og at en hvilken som helst mengde med tidspunkter som har en nedre grense, har en største nedre grense. I lys av de definisjonene som ble gitt rett ovenfor kan denne kontinuerlighetsantagelse formaliseres på den følgende måte:

(T5) Mng(x) & x Inkl T &(Ez)(Tp(z)& LimØ(x,z).->.
(Ez)(Tp(z) &Sup(x,z))

(T6) Mng(x) & x Inkl T &(Ez)(Tp(z)& LimN(x,z).->.
(Ez)(Tp(z) &Inf(x,z))

Fra de ting vi har nevnt ovenfor om tid fremgår det at det ble antatt at det til ethvert tidspunkt finnes et annet tidspunkt som kommer senere i rekken av tidspunkter. Dessuten tenkte vi oss at det til ethvert tidspunkt alltid finnes et tidligere tidspunkt. De to forutsetninger som her er nevnt uttrykkes av de følgende formler i L;+(E;3) :

(T7) (Ax)(Tp(x).->.(Ey)(Tp(y) & x<y))
(Ax)(Tp(x).->.(Ey)(Tp(y) & x>y))

Vi innførte ovenfor predikatkonstruksjonen "x er et reelt tall som angir avstanden mellom tidspunktet t;1 og tidspunktet t;2", som vi forkortet med "Dist(x,t;1,t;2)" i språket til E;3+. Dette er følgelig et primitivt predikat i L(E;3+). Vi skal ikke her gå dypere inn på spørsmålene som oppstår ved måling av tid. Vi innskrenker oss bare til å gjøre rede for en del setninger i L(E;3+) som vi finner forholdsvis rimelige. Vi skal betrakte de følgende ikke-logiske aksiomer for predikatet "Dist(x,t;1,t;2)"

(ME1) Dist(x,t;1,t;2).->. xêReell & t;1,t;2êT
(ME2) t;1,t;2êT.->.(E!x)(Dist(x,t;1,t;2))

Den første av disse to setningene uttrykker som man ser at dersom x er et tall som angir tidsavstanden mellom tidspunktene t;1 og t;2 så er x et reelt tall og t;1 og t;2 tidspunkter. Den andre setningen uttrykker at om t;1 og t;2 er tidspunkter finnes det alltid et og bare et reelt tall som angir tidsavstanden mellom dem. La oss bemerke at vi bruker "d(t;1,t;2)" som forkortelse for "(ix)(Dist(x,t;1,t;2))".

Den neste setningen om relasjonen Dist som vi vil betrakte er:

(ME3) (Ef)[f:Reell –(1-1,på)–>T & (Ax)(Ay)(x,yêReell.->(x<y <->
f(x)<f(y)))& (At;1)(At;2)(t;1,t;2êT.->. d(t;1,t;2) = Abs(f;-1(t;1)–f;-1(t;2)))]

Som man ser uttrykker de to første konjunktene i konjunksjonen som kommer etter eksistenskvantoren i (ME3) at f er en isomorfi mellom klassen av de reelle tall og klassen av tidspunkter. Merk at hvis f er en eller annen relasjon betegner vi den konverse relasjon med "f;-1". Merk også at "Abs(x)" leses "absoluttverdien til tallet x". I det følgende vil vi bruke

t;1+a der aêReell for å betegne det entydig bestemte tidspunktet t;2 som kommer etter t;1 og hvor avstanden mellom t;1 og t;2 er a. Tilsvarende vil vi bruke t;1-a , hvor a er et reelt tall, til å betegne det tidspunktet t;2 som kommer før t;1 og hvor avstanden mellom dette tidspunktet og t;1 er a. Uttrykket "<t;1,t;2]" betegner det halvåpne tidsintervallet som består av alle de tidspunkter som kommer etter t;1 og som samtidig enten kommer før t;2 eller er identisk med t;2. Tilsvarende betegner [t;1,t;2] klassen av alle tidspunkter som ligger mellom t;1 og t;2 inkludert disse tidspunktene.

La oss bemerke at disse setningene om tidsmetrikken d er konsistente med våre tidligere setninger om mengden av tidspunkter T. Man ser lett at alle disse setningene kommer ut som sanne om vi rett og slett identifiserer klassen av tidspunkter med de reelle tall, tenker oss at <-relasjonen mellom tidspunkter er identisk med <-relasjonen mellom reelle tall og endelig tenker oss metrikken d identifisert med den vanlige avstandsfunksjon mellom reelle tall.

Dermed skulle vi ha formalisert helt eksplisitt alle de påstandene om tid som vi mer eller mindre stilltiende har hatt i tankene i de innledende avsnitt.

La oss på dette punkt innskyte noen bemerkninger om de tids-teoretiske aksiomene (T1) -(T7) og (ME1) - (ME3) som vi har presentert så ovenfor. Det skulle være ganske klart at disse setningene er av en forenklet og kanskje noe "naiv" karakter. Som man ser oppfatter vi klassen av tidspunkter ordnet ved relasjonen "kommer før" som lineær, tett og kontinuerlig. Videre innføres her mengden av tidspunktene uavhengig av klassen av alle mulige verdener slik at vi i en viss forstand opererer med den samme absolutte, kontinuerlige og tette tid i enhver mulig verden. Imidlertid kunne man tenke seg at man i stedet for predikatene "x er et tidspunkt" og "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y" hadde innført de mer "relativistiske" predikatene
"x er et tidspunkt i verdenen w" og "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y i verdenen w". Dette innebærer at språket nå blir mer uttrykksrikt og at man kan formulere distinksjoner som man kan ikke uttrykke i L;+(E;3). I det mer relativistiske språk kan man f. eks. uttrykke den tanke at mengden av tidspunkter i en verden er forskjellig fra mengden av alle tidspunkter i en annen verden. Videre kan man tenke seg at "kommer før"-relasjonen mellom tidspunkter i en verden er kontinuerlig, tett og lineær, mens denne relasjonen har helt andre egenskaper over mengden av tidspunkter som eksisterer i en annen verden, f.eks. tillater at tiden forgrener seg, er sirkulær el. Når vi har unnlatt å innføre de mer kompliserte tidspredikatene er dette delvis fordi vi ikke vil gjøre teorien unødig komplisert på dette punkt, delvis fordi betraktninger i forbindelse med tid tross alt spiller en mer underordnet rolle i dette arbeidet.

Vi tok med konstruksjonen "x er den aktuelle verden" blandt de primitive konstruksjonene i L;+(E;3). Denne ble forkortet med "Aktuell(x)". Uten at vi tydelig nevnte det har vi antatt at den aktuelle verden er en logisk mulig verden. Dette innebærer selvfølgelig at den aktuelle verden er et element i klassen av alle mulige verdener. Dessuten antar vi selvfølgelig at det finnes et og bare et objekt som er den aktuelle verden, mao. at det finnes nøyaktig et objekt x som oppfyller den åpne setningen "Aktuell(x)". Disse forutsetningene formaliseres eksplisitt ved de følgende to setninger:

(AK1) (E!x)(Aktuell(x))
(AK2) (Ax)(Aktuell(x). ->. xêI)

I denne forbindelse bør man huske på at vi bruker "I" som betegnelse for klassen av alle logisk mulige verdener.

Vi har så langt bare tatt for oss de mer trivielle setninger om tid og mulige verdener som vi har lagt til grunn tidligere. La oss nå se nærmere på konstruksjonen " x er en totaltilstand som foreligger realisert i verdenen w ved tidspunktet t", "TL(x,w,t)", som vi har

inkludert i vokabularet til E;3+ og studere eventuelle lover som gjelder for denne konstruksjonen. Er x en totaltilstand som foreligger realisert i verdenen w ved tidspunktet t høres det trivellt ut å påstå at w er en mulig verden og at t er et tidspunkt. Denne setningen, som vi kan formalisere slik:

(TL1) (Ax)(Aw)(At)(TL(x,w,t). ->. wêI & têT),

kan strengt tatt ikke utledes fra grunnsetningene i E;3+. Ønsker vi å studere en helt eksplisitt oppbygd teori om mulige totaltilstander må denne tas med.

Heller ikke er det følgende noe teorem i E;3+, eller E;3+ utvidet med eventuelt (T1) - (T7),(AK1) og (AK2), nemlig at hvis x er en totaltilstand som foreligger realisert i verdenen w ved tidspunktet t så er x den eneste slike totaltilstand. Den følgende formel, som uttrykker nettopp dette, er altså intet teorem i E;3+, og vi nevner den nå eksplisitt, siden den, som en rekke andre antagelser, har figurert mer eller mindre stilltiende i våre betraktninger ovenfor.

(TL2) (Aw)(At)((Ex)TL(x,w,t). ->.(E!x)TL(x,w,t))

De to setningene (TL1) og (TL2) er meget svake. De er forsåvidt fullt forenelige med den påstand at det ikke finnes noen mulig verden hvor det ved noe tidspunkt er slik at en eller annen mulig totaltilstand foreligger realisert.

Vi tenkte oss ovenfor at den aktuelle verden nå befinner seg i en bestemt totaltilstand, videre at den alltid har befunnet seg i en eller annen slik tilstand og at den for all fremtid vil fortsette med å gjøre det. Heller ikke dette, som uttrykkes ved formelen (xii) nedenfor, kan utledes fra noen av de setningene vi så langt har nevnt.

(TL3) (At)(Tp(t).->. (Ex)(TL(x,Akt,t)))

Vi diskuterte i noen grad ovenfor hvorvidt det er slik at enhver logisk mulig verden ved ethvert tidspunkt befinner seg i en bestemt totaltilstand. Mao. om det er slik at følgende holder:

(TL4) (At)(Aw)(Tp(t) & wêI. ->. (Ex)(TL(x,w,t))).

Denne setningen impliserer (TL3) og er følgelig sterkere. Det synes ikke helt urimelig å tenke seg at (TL4) holder. Men det virker ikke som om den fra en rent logisk synsvinkel er uunværlig. En mulighet i denne forbindelse er at vi kaller de mulige verdener hvor det ved alle tidspunkter foreligger realisert en mulig totaltilstand, altså de verdener hvor vi har:

(At)(têT.->. (Ex)(TL(x,w,t))

for normale. Vi kan så hvor det er nødvendig begrense oss til de normale verdener. Man kunne i denne forbindelse kanskje også tenke seg å gå et skritt videre og kalle de verdener hvor det ikke ved noe tidspunkt foreligger realisert noen totaltilstand for tilstandsløse. En mulig setning som man da kunne ta i betraktning ville i så fall være at enhver verden enten er normal eller tilstandsløs. Den følgende setning i L;+(E;3) uttrykker denne tanke:

(TL5) (Aw)(wêI.->.
[(At)(têT.->. (Ex)(TL(x,w,t)) v (At)(têT.->. ¬(Ex)(TL(x,w,t))])

Vi skal imidlertid betrakte et aksiom[2] som er meget sterkere enn noen av (TL1) - (TL5). Vi kaller Mg(x: (Et)(Ew)(TL(x,w,t))) for mengden av alle logisk mulige totaltilstander. Den setningen vi nå ønsker å betrakte sier at hvis f er en funksjon der domenet er mengden av alle tidspunkter og hvor verdiområdet er inkludert i mengden av alle logisk mulige totaltilstander, så finnes det en mulig verden hvor vi har for ethvert tidspunkt t at f(t) er den totaltilstand som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w. I symboler kan dette aksiomet formuleres slik:

(TL6) (Af)(Func(f) & Dom(f)= T &
Rgn(f) Inkl Mg(x: (Et)(Ew)(TL(x,w,t))). –>
(Ew)(wêI & (At)(têT –> TL(f(t),w,t)))

Dette er, som nevnt, en ganske sterk antagelse. La oss formulere aksiomet på en litt annen måte. La oss kalle enhver funksjon som til ethvert tidspunkt tilordner en logisk mulig totaltilstand for en totaldistribusjon. En totaldistribusjon er da en funksjon som oppfyller antesedent-betingelsen i (TL6). La oss videre si at en total-distribusjon foreligger realisert i verdenen w hvis og bare hvis vi har for ethvert tidspunkt t at f(t) foreligger realisert i verdenen w ved tidspunktet t, mao. hvis og bare hvis (At)(têT –> TL(f(t),w,t)). Aksiomet (TL6) kan da reformuleres ved å si at enhver totaldistribusjon vil alltid foreligge realisert i en eller annen logisk mulig verden. Hvis vi bare ser på (TL1) - (TL5) og ikke tar med (TL6) kan vi ikke slutte dette. Disse aksiomene innebærer bare at i enhver mulig verden vil en eller annen totaldistribusjon foreligge realisert.

La oss nå notere det følgende: I lys av våre tidsteoretiske aksiomer, T1 - T7, ser man at mengden av tidspunkter eksisterer og at den er likemektig med mengden av de reelle tall, dvs. kontinuumet. Videre fremgår det fra (TL4) at mengden av logisk mulige totaltilstander er ikke-tom siden det finnes mulige verdener og tidspunkter. Nå er det imidlertid slik at ingen av setningene (TL1) - (TL6), hverken enkeltvis eller samlet, sier noe om hvor mange logisk mulige totaltilstander som eksisterer bortsett fra at mengden av denne type tilstander er ikke-tom. Imidlertid synes det rimelig å tenke seg at denne mengden skulle være minst tellbart uendelig. Det følgende aksiom som uttrykker akkurat dette synes derfor å være et helt naturlig supplement til de aksiomer vi har nevnt ovenfor:

(TL7) (Ef)(f : Nat - (1-1) -> Mg(x: (Et)(Ew)(TL(x,w,t))))

Det finnes med andre ord en funksjon som en-entydig avbilder mengden av de naturlige tall, Nat, inn i mengden av alle logisk mulige totaltilstander. Fra (TL6) og (TL7) følger at kardinaltallet til mengden av totaldistribusjoner må være minst like stort som kardinaltallet til mengden av de reelle tall. Dette, (TL6) og våre øvrige aksiomer impliserer også at mengden av mulige verdener er minst likemektig med mengden av de reelle tall.

Vi har så langt sett på mulige setninger som gjelder for alle predikatene på listen som ble gitt innledningsvis bortsett fra predikatet "x er en kausallov som gjelder i verdenen w". I forbindelse med dette skal vi bare betrakte den følgende setning, som synes temmelig rimelig:

(CL1) CLov(x,w).->. xêU & wêI & True(w,x)

Setningen uttrykker at hvis x er en kausallov som gjelder i verdenen w så er x et utsagn, ie. et element i U, og w en mulig verden. Dessuten er utsagnet x sant i verdenen w. Gitt at alle

[2] Når vi bruker ordet "aksiom" i dette arbeidet bør man merke seg at det ikke har noen erkjennelsesteoretiske overtoner. Det innebærer ikke at de setningene vi benevner med dette navn er umiddelbart innlysende, evidente eller nødvendigvis sanne. Ordet har i dette arbeid den samme betydning som uttrykket: " setning i språket L;+ (E;3) eller utvidelser av dette som vi her ikke vil forsøke å bevise, men som vi sammen med andre setninger vil utlede en rekke konsekvenser fra."

konstruksjonene i vokabularet til E;3+ er meningsfulle virker det merkverdig om man skulle benekte dette.

Vi skal imidlertid ikke i dette arbeidet forsøke å gi noen definisjon eller reduktiv analyse av predikatet "x er en kausallov i verdenen w". I den teorien som vi her beskriver er det altså et primitivt predikat. At vi tentativt bruker det som et primitivt predikat innebærer selvfølgelig ikke at vi mener at uttrykket er fullstendig presist eller at det er umulig å gi noen analyse av det.

Det virker imidlertid rimelig etter vår oppfatning å tro at dette predikatet ikke kan defineres på en tilfredsstillende måte ved hjelp av de andre predikatene i L;+(E;3). Vi skal ikke gi noe bevis for dette her, men nøyer oss med å konstatere at dette kan virke rimelig. Derimot er det påkrevet å si noen ord om sammenhengen mellom predikatet "CLov(x,w)" og den setningsdannende konstruksjon på setninger "Det er kausalnødvendig at ---- " hvor man må tenke seg en setning innsatt for uttrykket "----". Innenfor kausallogikken kan man si at man studerer de rent logiske egenskapene til denne konstruksjonen. La oss nå tenke oss at vi utvider L;+(E;3) med ytterligere et predikat, nemlig "x er et utsagn som er kausalnødvendig sant i verdenen w". Vi forkorter dette med "Nc(x,w)". Når det gjelder kausalnødvendighet ved utsagn virker det rimelig å si at hvis et utsagn er kausalnødvendig sant i en verden w så må også utsagnet være sant i verdenen w. Videre synes det rimelig å kreve at alle utsagn som er implisert av utsagn som er kausalnødvendig sanne i en verden w også er kausalnødvendig sanne i denne verden w. Endelig virker det rimelig å tro at det tautologiske utsagn, dvs. det utsagn som har I, mengden av alle mulige verdener, som sin sannhetsmengde, er kausalnødvendig sant i enhver mulig verden. Dette innebærer at de følgende setninger synes rimelige:

(i) Nc(x,w) –> xêU & wêI
(ii) Nc(x,w) –> wês(x)
(iii) Nc(x,w) & s(x) Inkl s(y) . –> Nc(y,w)
(iv) Nc(s;-1(I),w)

Kan man nå definere "CLov(x,w)" ved hjelp av "Nc(x,w)" og de andre predikatene som inngår i L;+(E;3) ? Dette virker ikke helt umulig, men vi skal ikke undersøke denne muligheten nærmere akkurat her. Derimot er det mulig å definere predikatet "Nc(x,w)" ved hjelp av predikatetene i L;+(E;3) slik at man kan utlede setningene (i) - (iv). Saken er den at det virker svært naturlig å si at et utsagn er kausalnødvendig sant i en verden w hvis og bare hvis det er en logisk konsekvens av mengden av alle de kausallover som gjelder i verdenen w. Man kan altså foreslå den følgende definisjon:

Nc(x,w) <-> [wêI & xêU & s(SNu(Mg(y: CLov(y,w)))) Inkl s(x)]

Av plasshensyn utelater vi imidlertid beviset for at man på basis av denne definisjonen kan utlede setningene (i) - (iv).

I tillegg til (CL1) skal vi bare se på et annet aksiom i forbindelse med predikatet "CLov(x,w)". La oss si at to verdener er historisk sett identiske hvis og bare hvis det ved ethvert tidspunkt t er slik at den samme totaltilstand foreligger realisert i de to verdenene. Er x en kausallov som gjelder i verdenen w og er w historisk sett identisk med verdenen w' virker det rimelig å anta at x også er en kausallov i verdenen w. Denne setningen kan formuleres slik:

(CL2) CLov(x,w) &w'êI &
(At)(As)(têT –> (TL(s,w,t) <-> TL(s,w',t))).-> Clov(x,w')

(CL1) og (CL2) er de eneste setningene om kausallover som vi trenger videre utover i dette arbeidet.

La oss nå foreta en oppsummering av innholdet i denne paragrafen. Innledningsvis definerte vi språket L;+(E;3) som det språket vi får når vi utvider det ikke-logiske vokabularet til språket til teorien E;3 med de seks predikatene som ble nevnt innledningsvis i denne paragraf. E;3+ ble så definert som den teorien som fremkommer som resultat når vi utvider språket til E;3 til L;+(E;3) og dessuten legger til alle nye instanser av replacement og utsondringsaksiomet i L;+(E;3) som nye ikke-logiske aksiomer.

Vi har nå gjort rede for en rekke setninger som kan formuleres i språket til denne teori. Det dreier seg, som man ser, om de "tidsteoretiske" setningene (T1) - (T7), (ME1) - (ME3), setningene (AK1) og (AK2) om eksistensen av en unik aktuell verden, og endelig setningene (TL1) - (TL7) som fikserer de mest grunnleggende egenskapene til predikatet "TL(x,w,t)". Endelig må nevnes setningene (CL1) og (CL2). Alle disse setningene er setninger i L;+(E;3). Konjunksjonen av lukningene av alle disse setningene, og bare dem, skal vi i det følgende kalle for "HP 1". Utvider vi nå E;3+ med HP1 som nytt ikke-logisk aksiom får vi teorien E;3+[HP1]. Denne representerer så og si "første halvdel" av den teorien DF som vi i §2 nevnte at vi skulle definere helt presist.[3] Dette har nå blitt gjort. I det følgende vil vi innføre en del begrepsdannelser i forbindelse med denne teorien og bevise en rekke teoremer i forbindelse med disse begrepene. I beviset for noen av disse satsene behøver man ikke alle av de setningene som inngår i HP1. Dette gjelder særlig de to nokså sterke antagelsene (TL6) og (TL7). Det gjelder også setningen (CL2). I de tilfelle hvor vi har bruk for disse aksiomene i beviset for noen av våre satser vil vi forsøke å gjøre det helt tydelig at vi benytter dem.

§4 Viktige definisjoner i teorien E;3+ .

Vi har i den foregående paragraf gitt en helt eksplisitt definisjon av teorien E;3+[HP1]. Det vi nå vil gjøre er å fiksere betydningen til endel uttrykk som vi etterhvert vil få bruk for.

Mengden av alle de totaltilstander som foreligger realisert ved et eller annet tidspunkt i en eller annen mulig verden, altså Mg(x: (Et)(Ew)(TL(x,w,t))),
vil vi betegne med "Q". Hypotesen HP1 som vi spesifiserte i forrige paragraf sier intet direkte om kardinaltallet til Q. Men naturligvis virker det naturlig å anta at dette kardinaltall er temmelig stort. Hvis man virkelig tar de begreps-dannelsene som vi har innført alvorlig skulle man tro at det burde finnes minst like mange elementer i Q som det finnes reelle tall, mao. at Q har en mektighet som er minst det til kontinuumet.

Anta s er en logisk mulig totaltilstand, dvs. et element i Q og at t er et tidspunkt. Da vil vi med "l(s,t)" betegne det utsagn at tilstanden s foreligger realisert ved t. Utsagnet at s foreligger realisert ved t vil være sant i nøyaktig de og bare de verdener w hvor man har at s foreligger realisert ved t i denne verden w. Dette innebærer at sannhetsmengden til utsagnet l(s,t) vil være
Mg(w : TL(s,w,t)) . Siden s er den funksjonen som til ethvert utsagn u tilordner u dets sannhetsmengde, klassen av alle de mulige verdener hvor utsagnet er sant, og "s;-1" betegner den omvendte funksjon, har vi at l(s,t) kan defineres ved:

---

[3] Selvom fremstillingsmåten er svært forskjellig er teorien E;3+[HP1] etter vår mening nær beslektet med teorier man finner hos von Wright og delvis inspirert av hans arbeider. Man kan i denne forbindelse konsultere von Wright [1], [2].

l(s,t) = s;-1(Mg(w : TL(s,w,t)).

Q er klassen av alle totaltilstander som det er logisk mulig at kan foreligge realisert. Exp(Q,T) er klassen av alle de funksjoner som har klassen T av tidspunkter som sitt domene og hvor verdiområdet er inkludert i mengden Q. Vi skal kalle de enkelte elementer i mengden Exp(Q,T) for tilstandsdistribusjoner. Vi sier at en tilstandsdistribusjon f foreligger realisert i verdenen w hvis og bare hvis (At)(têT.->. TL(f(t),w,t)). Mengden av alle de verdener w hvor tilstandsdistribusjonen f foreligger realisert skal vi betegne med "G(f)". Vi har derfor pr. definisjon:

G(f) = Mg(w : (At)(têT.->. TL(f(t),w,t)))

La oss også på dette sted minne om noen definisjoner vi tidligere har gitt. Vi betegner den totaltilstanden som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w med "Tot(t,w)". Videre betegner uttrykket "Akt" den aktuelle verden, mao. (ix)(Aktuell(x)). Endelig betegner "T" mengden av tidspunkter slik at vi har T = Mg(x : Tp(x)).

Med historien til en mulig verden w forstår vi den totaldistribusjon f som foreligger realisert i verdenen w. Betegner vi historien til verdenen w med "Hist(w)" har vi følgelig at Hist(w) = (if)(fêExp(Q,T)&(At)(têT.->. TL(f(t),w,t))). Nå har vi også at den funksjonen som til ethvert tidspunkt t tilordner den total-tilstanden som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w vil være den tilstandsdistribusjon som foreligger realisert i w. Dette innebærer at vi kan definere "Hist(w)" ved Hist(w) = Mg(<t,Tot(t,w)>: têT).

To verdener som har den samme historie vil vi kalle for historisk sett ekvivalente. Vi vil bruke "~" for å betegne denne relasjon. Vi har altså at følgende gjelder per definisjon for alle logisk mulige verdener w;1 og w;2 :

w;1~w;2 <-> Hist(w;1) = Hist(w;2).

I forbindelse med dette begrep om historisk ekvivalens mellom logisk mulige verdener vil vi gjøre oppmerksom på de følgende forhold. For det første er det intet i teorien E;3+ som forhindrer at to forskjellige verdener kan ha den samme historie. Dette gjelder om vi også forutsetter HP1, dvs. tenker oss teorien E;3+ utvidet med setningen HP1 som et nytt ikke-logisk aksiom. For det andre er det konsistent med E;3+ å anta at det finnes en og bare en historie som er realisert i alle mulige verdener. Dette er naturligvis mer å betrakte som et spesialtilfelle. For det tredje er det intet i teorien E;3+ som gjør det inkonsistent å anta at Mng(Hist(w): wêI) er endelig. Faktisk er det eneste vi kan bevise i E;3+ utvidet med HP1 – om vi ikke tar med TL6 og TL7 som konjunkter i HP1 – bare den påstand at $1 \leq Ca(Mg(Hist(w): wêI)) \leq Ca(Exp(Q,T))$.

Vi kan også snakke om historien til en mulig verden opp til et bestemt tidspunkt. Er f historien til en mulig verden vil f med domenet begrenset til Mg(t': Tp(t') &t'<t) representere dette objekt. Bruker vi "Hist(w);t" som forkortelse for uttrykket "Historien til den mulige verden w opp til, men ikke inkludert, tidspunktet t " kan vi altså sette:

Hist(w);t = Rest(Hist(w), Mg(t': Tp(t') &t'<t))

Vi skynder oss på dette punkt med å bemerke at hvis f er en eller annen funksjon, og x en mengde, betegner uttrykket "Rest(f,x)" restriksjonen av funksjonen f til mengden x, mao. den funksjonen man får når domenet til f begrenses til x. Den formelle definisjonen kan formuleres slik:

Rest(f,x) =;d fΩ(xXRgn(f))

La X være en eller annen mengde med tidspunkter. Forutsett altså at Meng(X) & X Inkl T. La w være en eller annen mulig verden. Da betegner vi historien til w begrenset til tidspunktmengden X med uttrykket "Hist(w,X)". Dette vil da være definert slik: Hist(w,X) = Rest(Hist(w),X). Fra de definisjonene vi har gitt ser man lett at vi må ha Hist(w);t = Hist(w, Mg(t': Tp(t') &t'<t)). Videre skulle det ikke være vanskelig å se at vi også har: Hist(w) = Hist(w,T) hvor T selvfølgelig er klassen av alle tidspunkter.

De definisjonene vi har gitt oppsummer vi formelt slik:

DEFINISJON 4.1

(1) Q= Mg(x: (Et)(Ew)(TL(x,w,t)))
(2) l(s,t) = s;-1(Mg(w : TL(s,w,t))
(3) G(f)= Mg(w : (At)(têT.->. TL(f(t),w,t)))
(I dette tilfelle forutsetter vi at fê Exp(Q,T))
(4) Tot(t,w) = (ix)(TL(x,w,t))
(5) T= Mg(x: Tp(x))
(6) Akt = (ix)(Aktuell(x))
(7) Hist(w) = Mg(<t, Tot(t,w)>: têT)
(8) Hist(w);t = Rest(Hist(w), Mg(t': Tp(t')&t' <t))
(9) Hist(w,X) = Rest(Hist(w),X)
(10) w ~ w' <-> Hist(w) = Hist(w')

Vi har nå gjort rede for de viktigste definisjonene vi vil bruke i forbindelse med teorien E;3+. Vårt neste mål er å gjøre rede for en del teoremer av mer elementær natur som kan kaste lys over en del viktige sider ved de begrepsdannelsene vi så langt har innført og som dessuten vil bli brukt i forbindelse med en del senere satser.

§5 Endel elementære satser i teorien E;3+ .

I det følgende skal vi forutsette hypotesen HP1 i alle våre satser. La oss minne om at denne hypotese, som er en konjunksjon av en rekke formler, inneholder som konjunkt setningen TL4. Denne sier at

(At)(Aw)(Tp(t) & wêI. ->. (Ex)(TL(x,w,t))),

som innebærer at i enhver mulig verden ved ethvert tidspunkt t foreligger realisert en bestemt totaltilstand. Vi skal altså i det følgende utelukke eksistensen av mulige verdner hvor disse ved noen, eventuelt alle, tidspunkter er tilstandsløse.

Vår første sats angår mengden av alle logisk mulige totaltilstander. Man kan spørre om denne mengden rett og slett eksisterer, mao. om den er et element i det kumulative mengdehierarkiet. Gitt HP1 kan bevise dette i teorien E;3+:

TEOREM 5.1 *Mng(Q)*

Bevis: Fra setningene som inngår i HP1, nærmere bestemt fra TL2 og TL4, har vi for alle wêI og alle têT at:

(1) (Ax,1)(Ax;2)(TL(x;1,w,t) & TL(x;2,w,t) .->. x;1=x2)

La t være et vilkårlig tidspunkt. Definer: f(t) = Mg(<w,{x}> :wêI& TL(x,w,t)). Da har vi i lys av (1) at f(t) er en funksjon. Dessuten følger at:

f(t)"I = Mg({x}: (Ew)(wêI & TL(x,t,w)))

er en mengde i lys av replacement-aksiomet, siden I er en mengde. Det følger videre at UN(f(t)"I) = Mg(x: (Ew)(wêI & TL(x,t,w)) er en mengde ved hjelp av foreningsmengde-aksiomet. Setter vi pr. definisjon

P(t) = Mg(x :(Ew)(wêI & TL(x,w,t))

har vi altså:

(3) (At)(têT.->. Mng(P(t))).

Ved hjelp av replacement og foreningsmengdeaksiomet følger da at UN(Mg(P(t) : têT) er en mengde. Men vi har åpenbart at Q = UN(Mg(P(t) : têT). Det følger derfor at Q er en mengde. **Q.E.D.**

Siden Q eksisterer og T eksisterer har vi ved hjelp av de mengdeteoretiske aksiomene i vår teori at også kryssproduktet, det cartesiske produkt, av disse to mengdene er en mengde og derfor finnes. Siden

(Af)(fêExp(Q,T).->.f Inkl Prod(Q,T))

følger det at alle totale tilstandsdistribusjoner finnes. Fra dette følger også at Exp(Q,T) Inkl Pt(Prod(Q,T)) og i lys av de rent mengdeteoretiske aksiomene i vår teori, nærmere bestemt potensmengde-aksiomet og utsondringsaksiomet må derfor også mengden av alle tilstandsdistribusjoner finnes.

Vårt neste teorem sier at historien til en mulig verden er en funksjon og at den er med i Exp(Q,T) og derfor en tilstandsdistribusjon. Det følger at historien til en mulig verden er et objekt som eksisterer i det kumulative hierarki og at det er en mengde.

TEOREM 5.2 *(a) (Aw)(wêI.->. Func(Hist(w)) & Dom(Hist(w))=T & Rgn(Hist(w)) Inkl Q)*

(b) (Aw)(wêI. ->. (Ef)(f = Hist(w) & Mng(Hist(w)) & Hist(w)ê Exp(Q,T)))

(c) (Aw)(wêI & Mng(X) &X Inkl T.->.[(Ef)(f = Hist(w,X)) & Mng(Hist(w,X)) & Hist(w,X)ê Exp(Q,X)])

(d) (Aw)(wêI & têT. ->. (Ef)(f = Hist(w);t) & Mng(Hist(w);t)

(e) (Aw)[wêI.->. f = Hist(w) <-> (fêExp(Q,T) &(At)(têT.->. TL(f(t),w,t)))]

Bevis: (a) Anta wêI. Vi har ifølge Definisjon 1 at Hist(w) = Mg(<t, Tot(t,w)>: têT) Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at Func(Mg(<t, Tot(t,w)>: têT)). Anta derfor at (1) <z,x;1>,<z,x;2>ê Mg(<t, Tot(t,w)>: têT) for å vise at x;1 = x;2. Fra (1) følger at det finnes t;1 og t;2 som er slik at:

(2) <z,x;1> = <t;1, Tot(t;1,w)> & <z,x;2> = <t;2, Tot(t;2,w)>

Fra dette følger umiddelbart:

(3) t;1 = z = t;2

(4) x;1 = Tot(t;1,w) & x;2 = Tot(t;2,w)

Fra disse to forhold ser man imidlertid at vi må ha: x;1 = x;2 som er det vi ønsker. Vi har dermed gitt et bevis for at Hist(w) er en funksjon. Anta nå for et vilkårlig objekt x at xêDom(Hist(w)). Da må der pr. definisjon finnes et objekt y slik at <x,y>êHist(w). Fra dette og definisjonen av "Hist(w)" følger at det må finnes têT slik at <x,y> = <t,Tot(t,w)>. Men da har vi x=têT. Anta på den annen side at têT. Siden vi antar at HP1 holder følger det at TL4 holder og derfor at vi har: (5) (At)(Aw)(Tp(t) & wêI. ->. (Ex)(TL(x,w,t))). Siden wêI og têT følger da at: (Ex)(TL(x,w,t)). I lys av TL2 er denne x entydig bestemt. Vi har derfor at

(6) y= (ix)(TL(x,w,t) =Tot(w,t) for noe y. Dette i sin tur innebærer at <t,y>êHist(w) og derfor at têDom(Hist(w)).

Vi må imidlertid også vise at Rgn(Hist(w)) Inkl Q om wêI. Anta derfor for et eller annet vilkårlig objekt x at xêRgn(Hist(w)). Da må det finnes noe y slik at <x,y>ê Hist(w). Dette innebærer per definisjon at det finnes t der vi har :
x=t & y=Tot(w,t). Det siste impliserer etter definisjonen av "Tot(w,t)" at
y = (ix)(TL(x,w,t)). Da har vi selvfølgelig at TL(y,w,t). I lys av definisjonen av Q impliserer så dette yêQ , som er det vi ønsker. Dermed har vi gitt bevis for det første punktet i teoremet.

(b) Fra det vi har bevist under punkt (a) følger det at hvis <x,y>êHist(w) så har vi xêDom(Hist(w)) Inkl T & yê Rgn(Hist(w)) inkl Q.
Dette innebærer at (1) Hist(w) Inkl Prod(T,Q). Siden Q og T er mengder har vi at Prod(T,Q) er det også. Dette, (1) og utsondringsaksiomet impliserer derfor at Hist(w) er en mengde og derfor eksisterer. Fra punkt (a) og definisjonen av uttrykket "Exp(Q,T)" følger at Hist(w)êExp(Q,T). Dette viser at det andre punktet i teoremet holder.

(c) Er X Inkl T har vi at Hist(w,X) = Rest(Hist(w),X). Fra dette følger åpenbart at Hist(w,X) Inkl Hist(w). Siden Hist(w) er en mengde følger derfor ved hjelp av utsondringsaksiomet at Hist(w,X) er en mengde, mao. at vi har:
(Ef)(f = Hist(w,X)) & Mng(Hist(w,X)). Er f en funksjon og x er en mengde har vi generelt at Dom(Rest(f,x))= x om x er inkludert i domenet til f. Tilsvarende vil vi ha at Rgn(Rest(f,x)) Inkl Rgn(f). Videre har vi at restriksjonen av f til mengden x er en funksjon om f er det. Disse satsene impliserer at Hist(w,X)êExp(Q,X)

(d) Denne påstanden er en ytterst enkel følgesetning til punkt (c). Vi får denne setningen om vi i punkt (c) setter X= Mg(t' : Tp(t') & t'<t).

(e) Vi skal bevise:

(1) (Aw)[wêI.->. f = Hist(w) <-> (fêExp(Q,T) &(At)(têT.->. TL(f(t),w,t)))]
Anta derfor (2) wêI & f = Hist(w) Fra punkt (b) har vi da at Hist(w)êExp(Q,T). Dette og (2) impliserer naturligvis at fêExp(Q,T). Anta for vilkårlig t at têT. Siden Dom(Hist(w)) =T har vi da têDom(Hist(w)). Dette innebærer i lys av definisjonen av "Hist(w)" at <t,Tot(t,w)>êHist(w) = f. Herav har vi f(t) = (Hist(w))(t) = (ix)(TL(x,w,t). Men fra dette og reglene som gjelder for bestemte beskrivelser har vi at TL(f(t),w,t). Dette viser at den ene halvdelen av (1) holder. Anta på den annen side (3) wêI & fêExp(Q,T) &(At)(têT.->. TL(f(t),w,t)). Anta têT for vilkårlig t. Da har vi TL(f(t),w,t). Dette impliserer i lys av TL2 at f(t) = (ix)(TL(x,w,t)) = Tot(t,w). Vi har derfor for alle têT at f(t) = (Hist(w))(t). Siden vi også har at f, såvel som Hist(w) er elementer i Exp(Q,T) følger at f = Hist(w). Dette viser at også den andre halvdelen av (1) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for (1). Alle punkter i Teorem 2 har nå blitt etablert og vårt bevis for denne sats er dermed fullstendig. **Q.E.D** .

Vi definerte relasjonen: ~ , historisk ekvivalens, mellom mulige verdener ovenfor. Det følgende teorem oppsummerer endel viktige egenskaper av elementær karakter ved denne relasjonen og endel andre nær beslektede relasjoner:

TEOREM 5.3 *(Sats om ekvivalensrelasjoner.) La oss betegne klassen av alle de verdener w hvor det finnes en fêExp(Q,T) slik at Hist(w)=f med NW. Da har vi at NW =I. La oss dessuten, slik som ovenfor, innføre en relasjon ~ mellom elementene i NW ved å sette at w;1~w;2 <-> Hist(w;1) = Hist(w;2). Da har vi at ~ er en ekvivalensrelasjon over NW som inndeler NW i en mengde av ekvivalensklasser hvor hver enkelt er ikke-tom, hvor klassene er innbyrdes disjunkte, og hvor de samlet uttømmer NW. La oss videre definere de følgende uttrykk, "Ekv(X,w;1,w;2)", "Ek(X,w;1)" og "E(X)" ved :*

Ekv(X,w;1,w;2) <-> Hist(w;1,X) = Hist(w;2,X)
Ek(X,w;1) = Mg(w : wêI & Ekv(X,w,w;1))
E(X) = Mg(Ekv(X,w) : wêI)

Anta tilslutt at følgende holder: ø ≠ X SInkl Y Inkl T. Da gjelder:

(a) Mg(<w;1,w;2> : w;1,w;2êI & Ekv(X, w;1,w;2)) er en ekvivalensrelasjon.
(b) UN(Mg(x : xêE(X))) = I
(c) (Ax)(Ay)(x,yêE(X) & x≠y. -> . xΩy = ø)
(d) (Ax)(xêE(X). ->. x≠ø)
(e) Ekv(T,w;1,w;2) <-> w;1~w;2
(f) Ekv(Y,w;1,w;2).->. Ekv(X,w;1,w;2)
(g) (Ax)(xêE(X).->. x = UN(Mg(Ek(Y,w) : wêx)

Bevis: La oss først bevise at (1) Mg(w: (Ef)(fêExp(Q,T) & f = Hist(w))) = I. Inklusjonen mot høyre er her triviell. Anta derfor at wêI. Fra Teorem 5.2 følger da at det finnes en mengde f slik at f = Hist(w) & Hist(w)êExp(Q,T). Herav følger selvfølgelig at (Ef) (fêExp(Q,T) & f = Hist(w)) og derfor at wêNW om vi definerer "NW" slik det gjøres i teoremet ved:

NW = Mg(w: (Ef)(fêExp(Q,T) & f = Hist(w))).

Den andre påstanden i teoremet følger fra punktene (a) - (g). La oss derfor gi bevis for dem.

(a) Sett R = Mg(<w;1,w;2> : w;1,w;2êI & Ekv(X, w;1,w;2)). Vi skal da vise at R er en ekvivalensrelasjon. Anta wêI for vilkårlig w. Vi må da vise at Hist(w,X) = Hist(w,X). Dette skulle imidlertid være fullstendig opplagt siden det fra Teorem 2 følger at (Ef)(f = Hist(w,X)). Vi har derfor: (1) (Aw)(wêI.->. xRx). At relasjonen R er symmetrisk og transitiv følger umiddelbart fra definisjonen. Det skulle derfor være unødvendig å gi noe detaljert bevis for det. Det følger at R er en ekvivalensrelasjon.

(b) Vi må også bevise : (2) UN(Mg(x : xêE(X))) = I. Inklusjonen mot høyre er i det vesentlige triviell. Har vi wê UN(Mg(x : xêE(X))) følger det at det finnes y slik at wêy & yêE(X)=Mg(Ek(X,w) : wêI). Da har vi

y = Mg(Ek(X,w) : wêI)

og følgelig at wêEk(X,w') for noe w'êI. Men fra definisjonen av "Ekv(X,w')" ser man at Ekv(X,w) Inkl I. Det følger derfor at wêI. Når det gjelder inklusjonen den andre veien i (2) antar vi for vilkårlig w at wêI. Fra Teorem 5.2 følger det da at det finnes f der vi har fêExp(Q,T) & f = Hist(w). Det følger da at
Hist(w,X) = Rest(Hist(w),X) = Hist(w,X) og derfor at wêEk(X,w). Da har vi i lys av definisjonen av "E(X)" at det finnes y slik at wêy & yêE(X). Dette innebærer at wê UN(Mg(x : xêE(X))). Dermed har vi gitt et bevis for punkt (b) i teoremet.

(c) Anta (1) x,yêE(X) & x≠y , men samtidig for reduktio ad absurdum at (2) xΩy≠ø. Den første antagelsen innebærer at det finnes w;1 og w;2 slik at (3) x=Ek(X,w;1) og y=Ek(X,w;2). Fra (2) følger at det må finnes noe w der vi har: (4) wêx & wêy. Fra dette følger i lys av de definisjonene som er gitt i teoremet at (5) Ekv(X,w;1,w) & Ekv(X,w;2,w). Siden Ekv er en ekvivalensrelasjon og derfor symmetrisk og transitiv følger herav: (6) Ekv(X,w;1,w;2). Fra (6) og det faktum at Ekv er en ekvivalensrelasjon følger videre at x=y, noe som strider mot (1). Dette viser at også punkt (c) i teoremet holder.

(d) Vi må vise at (1) (Ax)(xêE(X).->.x≠ø). Anta derfor for vilkårlig x at xêE(X). Dette innebærer at det finnes en wêI slik at x=Ek(X,w). Det vil derfor, i lys av de definisjonene som er gitt i teoremet, være tilstrekkelig å bevise at (2) (Ew')(w'êI & Hist(w',X) = Hist(w,X)). Siden wêI har vi i ved hjelp av Teorem 5.2 at (Ef)(f = Hist(w,X)). Dette impliserer åpenbart at:

wêI & Hist(w,X) = Hist(w,X).

Fra dette følger i sin tur (2). Dette viser at også punkt (d) holder.

(e) Anta Ekv(T,w;1,w;2). Fra definisjonen som ble gitt følger fra dette at (1) Hist(w;1,T) = Hist(w;2,T). Nå har vi for alle wêI per definisjon at Hist(w,T) er Rest(Hist(w),T) som i sin tur er identisk med

Hist(w)Ω(Prod(T,Rgn(Hist(w)))).

Men siden Dom(Hist(w)) = T følger da at Rest(Hist(w),T) = Hist(w). Dette og (1) innebærer at Hist(w;1) = Hist(w;2). Herav følger så: w;1~w;2. Det omvendte må også åpenbart holde.

(f) Vi skal vise at Ekv(Y,w;1,w;2).->. Ekv(X,w;1,w;2) gitt at
ø ≠ X SInkl Y Inkl T. Anta derfor at Ekv(Y,w;1,w;2). Da følger at:
(1) Hist(w;1,Y) = Hist(w;2,Y). Nå har vi generelt for alle wêI at Hist(w,Y) er restriksjonen av Hist(w) til Y, mao. Rest(Hist(w),Y). Men er X Inkl Y vil vi da ha at:
Rest(Rest(Hist(w),Y),X) = Rest(Hist(w),X) = Hist(w,X). Fra dette forhold og (1) følger at Hist(w;1,X) = Hist(w;2,X).

(g) Anta xêE(X). Vi skal vise at (+) x = UN(Mg(Ek(Y,w) : wêx) La derfor y være et vilkårlig element i x. Nå har vi Ekv(Y,y,y). Dette impliserer at yêEk(Y,y). Men yêx, det følger derfor at (Ew)(yêEk(Y,w) & wêx), mao. at:
(1) yêUN(Mg(Ek(Y,w) : wêx). Anta på den annen side for vilkårlig y at (1) holder. Da må det finnes w der (2) wêx & yêEk(Y,w). Siden xêE(X) har vi også at det finnes w' slik at (3) x=Ek(X,w'). Fra dette og (2) følger wêEk(X,w') og derfor (4) Ekv(X,w,w'). Fra den andre

konjunkten i (2) følger Ekv(Y,y,w) og derfor i lys av punkt (f), siden X Inkl Y at (5) Ekv(X,y,w). Fra (4) og (5) følger Ekv(X,y,w') og derfor at yêEk(X,w'). Fra dette og (3) følger så yêx som er det vi ønsker. Dette viser at også punkt (g) i teoremet holder og avslutter dermed vårt bevis for Teorem 3. **Q.E.D.**

I beviset for en rekke setninger, som vi skal presentere etterhvert, har vi bruk for den følgende hjelpesetning som angår en rekke nokså elementære egenskaper ved operasjonene l, Hist og G som vi har innført ovenfor:

LEMMA 5.1: *(a) fêExp(Q,T) ->.[(At)(têT.->.wês(l(f(t),t))) <-> wêG(f)]*
(b) fêExp(Q,T).->. (Aw)(wêI.->(wêG(f) <-> Hist(w)=f))
(c) fêExp(Q,T). ->(Aw)(wêG(f).->.((At)(As)(<s,t>êProd(T,Q)->.f(t)=s <-> wês(l(s,t)))

Bevis: (a) Anta fêExp(Q,T). Anta têT og for vilkårlig w at (1) wêG(f). Etter definisjonen av "G(f)" har vi: (2) G(f)= Mg(w : (At)(têT.->. TL(f(t),w,t))). Nå har vi videre per definisjon av "l(s,t)" at (3) l(s,t) = u;-1(Mg(w : TL(s,w,t)). Fra (1) og (2) følger: (4) (At)(têT.->. TL(f(t),w,t)). Fra (3) følger videre:

(5) wês(l(f(t),t)) <-> TL(f(t),w,t).

Fra (4) og (5) følger tydeligvis (At)(têT.->.wês(l(f(t),t))). Anta på den annen side at (At)(têT.->.wês(l(f(t),t))) holder for vilkårlig w. I lys av (3) har vi da : (At)(têT.->. TL(f(t),w,t)). Men dette og (2) impliserer wêG(f).

(b) Anta fêExp(Q,T) og at wêG(f) for vilkårlig w. Fra definisjonen av "G(f)" følger da: (0) (At)(têT.->. TL(f(t),w,t)). Nå har vi per definisjon av Hist at:
(1) Hist(w) = Mg(<t, Tot(t,w)>: têT) hvor Tot er definert ved:
(2) Tot(t,w) = (ix)(TL(x,w,t)). La t være et vilkårlig element i T. Da har vi ifølge (1) og (2) at (3) Hist(w)(t)=Tot(t,w)=(ix)(TL(x,w,t). Vi har videre fra (0) at
(4) TL(f(t),w,t) Fra (3) har vi så : TL(Hist(w)(t),w,t). Dette, (4) og våre aksiomer for TL impliserer f(t)=Hist(w)(t). Men t var vilkårlig element i T. Dette innebærer at vi kan konkludere med at (At)(têT.->. f(t) = Hist(w)(t)). Men herav følger Hist(w)=f. Anta på den annen side fêExp(Q,T)&wêI&Hist(w)=f. Anta t er vilkårlig entitet der têT. Vi har da ved hjelp av definisjonen av Hist at

Hist(w)(t) = Tot(t,w)=(ix)(TL(x,w,t)) Videre har vi siden Hist(w)=f at Hist(w)(t)=f(t). Disse to forhold impliserer f(t)=(ix)TL(x,w,t). Fra dette følger TL(f(t),w,t). Nå var t et vilkårlig element i T. Vi har derfor: (At)(têT.->.TL(f(t),w,t)). Men fra dette og definisjonen av G følger wêG(f).

(c) Anta (1) fêExp(Q,T) & wêG(f). Anta for vilkårlige t og s at (2) <t,s>êProd(T,Q). Fra (1) følger (3) (At)(têT.->. TL(f(t),w,t)). Anta f(t)=s da følger fra (2) og (3) at TL(s,w,t). Men fra dette og definisjonen av l har vi wês(l(s,t)). Omvendt har vi om wês(l(s,t)) at TL(s,w,t). Fra (3) og (2) følger da TL(f(t),w,t). Men fra dette og våre aksiomer om TL følger f(t)=s.

Dette avslutter vårt bevis for hjelpesetningen. **Q.E.D.**

§6 Begrepet tilstands-struktur

Vi skal nå innføre et nytt begrep i vår teori. Dette begrep, tilstands-struktur, er av en generell mengde-teoretisk art. Definisjonen er den følgende:

DEFINISJON 6.1 En tilstands-struktur er et fire-tuple <F,X,Y,Z> hvor komponentene F,X,Y og Z oppfyller de følgende krav:

(a) X,Y og Z er ikke-tomme mengder.
(b) F: Exp(X,Y) -> Pt(Z)
(c) Er f;1, f;2ê Dom(F) & f;1≠f;2. ->. F(f;1)ΩF(f;2)=ø
(d) Z = UN(Mg(F(f) : fêExp(X,Y))

Som man ser er en tilstandsstruktur et hvilket som helst fire-tuple som oppfyller kravene (a) - (c). Det er altså ikke nevnt noen spesielle krav som sier noe om hvilke objekter som skal inngå i de enkelte mengdene i en slik struktur. I prinsippet kan objektene i f. eks. Z være naturlige tall, reelle tall, vektorer, mer kompliserte mengdeteoretisk strukturer eller til og med fysiske objekter. Det samme gjelder komponentene X og Y i en slik struktur. Studerer man definisjonen nærmere ser man også at definiens bare inneholder rent mengde-teoretiske uttrykk dvs. uttrykk som lar seg definere innenfor språket til vårt mengde-teore-tiske system ZFCu. Vi har altså ikke benyttet oss av noen av de ikke-logiske predikater som adskiller språket L(E;3+) fra språket til ZFCu.

Selv om komponentene i en tilstands-struktur i prinsippet kan være hva som helst, har vi likevel en bestemt intuitiv intepretasjon av dem i tankene. Det er tanken at Z skal representere klassen av alle mulige verdener. Videre tenker vi oss at mengden Y representerer klassen av tidspunkter og at X representerer klassen av alle de totaltilstander som foreligger realisert ved de forskjellige tidspunkter i de forskjellige verdener. De enkelte funksjoner i mengden Exp(X,Y) er det meningen at skal representere mengden av alle de totalhistorier som kan foreligge realisert i de forskjellige mulige verdener. Er fêExp(X,Y) er altså tanken den at F(f), som man fra definisjonen ser at er en mengde med mulige verdener, skal representere klassen av alle de mulige verdener hvor historien, eller total-hendelsesforløpet f foreligger realisert.

Fra en rent matematisk synsvinkel kan klassen av tilstands-strukturer sammenlignes med andre struktur-klasser, f. eks. klassen av gruppe-strukturer, klassen av alle Boolske algebraer, klassen av ringer osv. På samme måte som man kan utvikle en generell teori om gruppe-strukturer,- og i dette tilfellet er resultatet en forbløffende rik og matematisk sett fruktbar teori, kan man i tilfellet tilstands-strukturer også tenke seg utviklet en rent generell teori, men selvfølgelig uten den matematisk interesse som gruppe-teorien har.

Vårt første teorem i forbindelse med tilstands-strukturer er den følgende sats:

TEOREM 6.1 *Definer H ved H = Mg(<x,G(x)> : xêExp(Q,T)). Da har vi at strukturen <H,Q,T,I> , hvor Q er mengden av totaltilstander, T er mengden av tidspunkter og I er mengden av alle logisk mulige verdener er en tilstandsstruktur.*

Bevis: Vi må selvfølgelig vise at strukturen oppfyller de kravene man stiller til en tilstandsstruktur slik vi har avgrenset denne struktur-klassen ovenfor. Det skulle være åpenbart at det følger fra HP1 at Q,T og I er ikke-tomme mengder. Kravet (i) i definisjonen ovenfor er derfor oppfyllt. Vi må imidlertid også vise at vi har:

H: Exp(Q,T) -> Pt(I)

Dette innebærer at det må bevises at H er en funksjon, videre at domenet til H er Exp(Q,T) og at verdiområdet til H er inkludert i mengden Pt(I). La oss først vise at H er en funksjon. Anta derfor for vilkårlige x, y og z at <z,x>,<z,y>êH. Fra definisjonen av H, som er gitt i teoremet , ser man da at det må finnes entiteter q;1 og q;2 slik at (1) <z,x>=<q;1,G(q;1)> og <z,y>=<q;2,G(q;2)>. Fra dette følger imidlertid at q;1=z=q;2. Dette impliserer at G(q;1)=G(q;2) og derfor i lys av (1) at x=y. Dette viser at H er en funksjon. Fra definisjonen av H fremgår det nokså umiddelbart at domenet til H er Exp(Q,T). Vi gir derfor ikke noe detaljert bevis for dette, men overlater oppgaven til leseren. Anta fêDom(H). Da har vi

fêExp(Q,T). Vi har da H(f) = G(f). Fra definisjonen av G har man at G(f)= Mg(w : (At) (têT.->. TL(f(t),w,t))). Dette impliserer umiddelbart at
G(f) Inkl I og derfor at H(f)=G(f)êPt(I). Dette viser at verdiområdet til H er inkludert i mengden Pt(I). Vi har så langt vist at strukturen som er definert i teoremet oppfyller de to første kravene som er oppført i definisjonen av tilstands-struktur.

Vi må også vise at det tredje kravet er oppfyllt. Anta derfor at (2) f;1,f;2êDom(H) og at f;1≠f;2. Fra dette og definisjonen av H følger åpenbart at H(f;1)=G(f;1) & H(f;2) = G(f;2). Fra definisjonen av G følger da

(3) G(f;1) = Mg(w : (At)(têT.->. TL(f;1(t),w,t)))

(4) G(f,2) = Mg(w : (At)(têT.->. TL(f;2(t),w,t)))

Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes en wêG(f;1)ΩG(f;2). Fra dette, (3) og (4) følger (5) (At)(têT.->. TL(f;1(t),w,t)) & (At)(têT.->. TL(f;2(t),w,t)). Fra (2) følger imidlertid at det må finnes noe t slik at (5) têT & f;1(t)≠f;2(t). Dette gir en i lys av (5) at TL(f;1(t),w,t) &TL(f;2(t),w,t). Siden f;1≠f;2 strider dette mot TL2 og TL4. Det gjenstår nå bare å vise at (6) I = UN(Mg(H(f) : fêExp(Q,T)). Inklusjonen mot venstre i (6) er nokså opplagt og beviset overlates til leseren. Anta på den annen side at wêI. I lys av Teorem 5.2 finnes det da en f slik at
(7) f = Hist(w) & fêExp(Q,T). Nå har vi ifølge definisjonen av H at H(f)=G(f). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise at wêG(f), mao. at

(+) (At)(têT.->.TL(f(t),w,t))

Anta derfor at têT for vilkårlig t. Da har vi i lys av (7) at têDom(f) og derfor at (8) f(t) = (Hist(w))(t). Fra definisjonen av Hist(w) har vi da:

(9) (Hist(w)) (t) = Tot(t,w) = (ix)(TL(x,w,t))

Fra (8) og (9) følger nå f(t) = (ix)(TL(x,w,t)). Dette impliserer åpenbart at TL(f(t),w,t). Vi har dermed vist at (+) holder. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 4.
Q.E.D.

Begrepet tilstands-struktur trekkes inn her fordi man ved hjelp av dette kan definere en rekke modeller som skulle ha interesse fra en mer generell filosofisk synsvinkel, og også fra en mer spesiell vitenskapsfilosofisk synsvinkel. Det vi i første rekke har i tankene er forskjellige ytterst forenklede atom-modeller. Vi tillater oss å se litt nærmere på et enkelt eksempel på en slik modell før vi i neste avsnitt tar for oss, og avgrenser, forskjellige determinisme-begreper.

For ikke å plage leseren med tekniske detaljer i moderne fysikk, og fordi vi hovedsakelig er opptatt av logiske problemstillinger og ikke hvordan den fysiske verden egentlig er, skal vi gjøre noen meget forenklede antagelser.

Vi tenker oss at det finnes en ikke-tom mengde, la oss kalle den At, med udelelige partikler. La oss kalle dem atomer. Vi forutsetter at akkurat de samme atomene eksisterer i alle logisk mulige verdener og at alle de atomene som eksisterer nøyaktig er elementene i At. Dette innebærer at atomene i den modellen vi nå har i tankene fra en logisk synsvinkel har nødvendig eksistens.

Videre skal vi anta at det finnes et absolutt evklidsk rom som eksisterer i alle de mulige verdenene. Et punkt i dette rom representeres av et reelt tall-trippel hvor den første komponenten representerer punktets X-koordinater, den andre komponenten punktets Y-koordinater og den tredje komponenten representerer punktets Z-koordinater. Klassen av alle reelle talltripler, Reell^3, representerer derfor dette rom. Det forutsettes altså at vi i en bestemt mulig verden, f.eks. den aktuelle verden, har fiksert et bestemt rettvinklet koordinatsystem og en bestemt metrikk, og at alle punktene i rommet tilordnes koordinat-tripler relativt til dette koordinatsystem. Siden rommet er det samme i alle mulige verdener følger det altså at rommet har nødvendig eksistens i den modellen vi betrakter her.

La nå t være et vilkårlig tidspunkt og w en eller annen mulig verden. Ved dette tidspunkt vil alle de enkelte atomer være spredt ut over i det evklidske fysiske rom,

representert ved Reell^3. Dette innebærer at om x er et atom vil det ved dette tidspunkt kunne tilordnes et talltrippel i Reell^3 som nøyaktig angir dets posisjon. Man kan altså tenke seg en funksjon f som til hvert atom xêAt tilordner et punkt i Reell^3 som representerer det punkt x befinner seg på ved tidspunktet t i verdenen w. Enhver slik funksjon fêExp(Reell^3,At) vil vi kalle en partikkel-distribusjon. Enhver funksjon som til ethvert tidspunkt tilordner en bestemt partikkel-distribusjon, altså enhver funksjon som er med i mengden Exp(Exp(Reell^3,At),T), vil vi kalle en total partikkeldistribusjon. Er derfor f en slik total partikkeldistribusjon vil (f(t))[x] representere det punktet i rommet hvor atomet x befinner seg ved tidspunktet t relativt til denne totale partikkeldistribusjonen. Ser vi på funksjonen P(f,x) definert ved: P(f,x) = Mg(<t, (f(t))[x]> : têT) vil denne funksjonen angi den banen i det fysiske rom som partikkelen x beveger seg i fra evighet til evighet relativt til den totale partikkel-distribusjonen f.

La oss nå definere presist hva vi forstår med en atomistisk modell.

DEFINISJON 6.2 Med en atomistisk modell forstår vi et ordnet par <At,<F,X,Y,Z>> som oppfyller de følgende krav: (i) At er en ikke-tom mengde. Elementene i denne mengden kalles atomene i modellen. (ii) <F,X,Y,Z> er en tilstandsstruktur hvor vi krever at X= Exp(Reell^3,At)

Som man ser fra definisjonen er en atomistisk modell et rent mengdeteoretisk begrep. Det stilles ikke noen andre krav til en slik modell enn dem som er nevnt i definisjonen. Fra en intuitiv synsvinkel er det imidlertid meningen at elementene i Z skal representere klassen av logisk mulige verdener og Y mengden av tidspunkter. Vi skal nå avgrense en mindre omfattende mengde med atomistiske modeller som vi skal tillate oss å kalle for naturlige atomistiske modeller. Dette skjer ved den følgende definisjon:

DEFINISJON 6.3 Med en naturlig atomistisk modell forstår vi et ordnet par <S,<At,<F,X,Y,Z>>> som oppfyller de følgende krav: (i) Y er mengden av tidspunkter ie. T. (ii) Z = I, dvs. at Z er mengden av alle logisk mulige verdener. (iii) <At,<F,X,Y,Z>> er en atomistisk modell (iii) S er en funksjon som en-entydig avbilder elementene i X på klassen av logisk mulige totaltilstander Q. Dette innebærer altså at vi krever at S er en funksjon hvor vi har :

S : X -(1-1,på) -> Q.

(iv) Vi krever for alle fêExp(X,Y) der wêF(f) & wêI at (At)(têT.->.S(f(t)) =Tot(w,t)).

Betrakter man denne definisjonen er det intet som tilsier at man innenfor rammen av E;3+ utvidet med hypotesen HP1 kan bevise eksistensen av naturlige atomistiske modeller av denne type. Dette er fordi teorien E;3+, utvidet med HP1 som eventuelt nytt ikke-logisk aksiom, ikke sier særlig meget om kardinaltallet til mengden av alle logisk mulige totaltilstander Q. En hvilken som helst påstand om kardinaltallet til denne mengden, bortsett fra at den er er minst likemektig med mengden av de naturlige tall, er forenelig med E;3+ utvidet med HP1. Man kan naturligvis i denne forbindelse postulere at (Ex)(Mng(x) & Ca(x)>0 & Q ≈ Exp(Reell^3,x), mao. at det finnes en ikke-tom mengde x som er slik at mengden av alle logisk mulige total-tilstander er likemektig med mengden av alle funksjoner som har x som sitt domene og sitt verdiområde inkludert i Reell^3. Det er mulig at en slik antagelse er rimelig. Vi behøver ikke umiddelbart å ta noen stilling til dette. Det man med sikkerhet kan si er at en slik antagelse er konsistent med teorien E;3+ utvidet med HP1.

§7 Om hendelser og hendelsesbegrepet.

Vi skal se litt nærmere på hva som kan forstås med en hendelse, og forsøke å formulere en definisjon av uttrykket "x er en hendelse" innenfor den rammen som vi nå har satt opp, ie. L;+(E;3)

La oss først ta for oss et eksempel. Et bestemt blad rives løs av vinden ved et bestemt tidspunkt t. Det hvirvler deretter ned mot bakken og treffer bakken ved tidspunktet t+a. (a>0) Ved hvert tidspunkt t' i intervallet [t,t+a] vil bladet og de enkelte deler av det befinne seg i en helt bestemt posisjon i luften. Ved tidspunktet t' vil det derfor være visse totale verdenstilstander som er forenelige med den posisjon bladet befinner seg i ved tidspunktet t', og visse totaltilstander som ikke er det. La oss kalle klassen av alle de totale verdenstilstander som er forenelige med at bladet befinner seg i nøyaktig den posisjon som det gjør ved tidspunktet t', med g(t'). Tilsvarende betraktninger kan gjøres gjeldene for de andre tidspunktene i intervallet. Ved et tidspunkt t" som, la oss si kommer umiddelbart etter t', men før t+a, vil bladet befinne seg i en litt annen posisjon. Ved t" kunne verden logisk sett ha vært i en av et uendelig antall totaltilstander. Men igjen vil det bare være noen av disse som vil være forenelige med det forhold at bladet befinner seg i den tilstand det faktisk gjør ved tidspunktet t". Klassen av alle disse totale verdenstilstander betegner vi med g(t"). Man ser at vi derfor til hvert tidspunkt t' i intervallet [t,t+a] kan assosiere en klasse av totaltilstander g(t'). Vi har mao. for oss en funksjon i dette tilfellet hvor domenet er [t,t+a], ie. Dom(g) = [t,t+a], og hvor g(t)êPt(Q) for alle têDom(g). Funksjonen g bestemmer entydig den hendelsen vi beskrev ovenfor. Generaliserer man nå fra dette eksemplet virker det ikke unaturlig å tenke seg at det til enhver hendelse av typen eksemplifisert ovenfor finnes en funksjon g der Dom(g) er en klasse av tidspunkter og hvor vi har G(t)êPt(Q) for alle t som er med i domenet til funksjonen. Det omvendte virker heller ikke unaturlig: Gitt en funksjon som oppfyller disse to krav synes det ikke urimelig fra en logisk synsvinkel å si at funksjonen representerer en hendelse. Det er dette hendelsesbegrep vi vil arbeide med i det følgende.

Anta S = <F,X,Y,Z> være en tilstandsstruktur. Med en hendelse i tilstands-strukturen forstår vi da en funksjon g som er slik at Dom(g) Inkl Y og hvor Rgn(g) Inkl Pt(X). Er g en hendelse over tilstandsstrukturen <F,X,Y,Z> har vi altså at g(t)êPt(X) for alle têDom(g). Vi sier at en hendelse g foreligger realisert i verdenen wêZ hvis og bare hvis

(At)(têDom(g).->. [(ix)(xêExp(X,Y) & wêF(x))(t)]êg(t)).

Vi setter :

Dc(g,S) =Mg[w : wêZ & (At)(têDom(g).->.[(ix)(xêExp(X,Y) & wêF(x))(t)]êg(t))].

Vi har altså at Dc(g,S) representerer utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene hvor g foreligger realisert. La oss bemerke at de begrepene vi har innført her er relative til en tilstandstandsstruktur <F,X,Y,Z>.

Et beslektet hendelsesbegrep kan imidlertid også innføres i teorien E;3+.
Med en *hendelse* g forstår vi da en funksjon g der Dom(g) Inkl T og hvor verdiområdet til g er inkludert i Pt(Q) ie. hvor vi har Rgn(g) Inkl Pt(Q). Vi kan så stipulere at en hendelse g foreligger realisert i verdenen w hvis og bare hvis den følgende betingelse er oppfylt:

(At)(têDom(g).->. [(if)(fêExp(Q,T) & wêG(f))(t)]êg(t))

Her er det selvfølgelig meningen at de uttrykk som inngår i definiens er definert som tidligere.

Er g en hendelse er det intet ved den gitte definisjon som utelukker at domenet til hendelsen kan være hele T eller et tidsintervall av typen [t,+∞ >. Med en *hendelse i snever forstand* skal vi i det følgende forstå en hendelse g som oppfyller de følgende to krav: For det første skal det alltid finnes to tidspunkter t,t' der t<t' og hvor vi har (At")(t"êDom(g).->. (t">t &t"<t')). For det andre krever vi at g(t) for alle têDom(g) skal inneholde minst to elementer. Disse restriksjonene utelukker at f. eks. funksjoner av typen Mg(<t,{f(t)}> .têT) hvor fêExp(Q,T) kan regnes som hendelser i begrenset forstand.

La oss bemerke de følgende ting. Defineres hendelser på den måten som vi her har gjort, er det intet som utelukker at domenet til en hendelse bare inneholder et tidspunkt, og at

hendelsen til dette tidspunkt tilordner en mengde av typen {x} der x er en totaltilstand, dvs. et element i Q. Dette innebærer at alle mengder av typen {<t,{x}>} der têT og xêQ er hendelser i vår betydning av ordet. Vi skal kalle slike hendelser for momentane totalhendelser. Er f en historie, dvs, er fêExp(Q,T), ser man at f kan oppfattes som unionen av en rekke momen-tane totalhendelser. Det vil dreie seg om de diverse hendelsene {<t,{f(t)}>} ettersom t gjennomløper mengden T av tidspunkter. Blant de momentane totalhendelser vil det være to ytterpunkter som fortjener separat betraktning. På den ene side har vi de hendelser der domenet bare inneholder et tidspunkt og hvor mengden som tilordnes dette tidspunkt er nullmengden. Man kunne kalle disse hendelsene for null-hendelser, eller kontradiktoriske hendelser. På den annen side har man de hendelser av typen {<t,Q>}, mao. hendelser hvis domene består av et tidspunkt og hvor hendelsen tilordner dette klassen av alle logisk mulige totaltilstander. Vi kaller hendelser av denne type for momentane tautologiske hendelser. En kontradiktorisk momentan-hendelse vil ikke foreligge realisert i noen mulig verden, mens derimot de tautologe momentan-hendelser vil foreligge realisert i alle logisk mulige verdener, under forutsetning av at man antar at alle mulige verdener har en historie. Er t;1 og t;2 to distinkte tidspunkter skulle det være åpenbart at den kontradiktoriske momentanhendelsen hvor domenet inneholder t;1 er forskjellig fra den hvor domenet inneholder t;2. Grunnen er selvfølgelig at {<t;1,ø>} ≠ {<t;2,ø>} om t;1≠t;2. Det samme gjelder for de tautologiske momentanhendelsene.

§8 Om determinisme og deterministiske teorier

Vi har så langt ikke sagt noe om determinisme og hva man kunne kalle deter-ministiske teorier. Vi skal nå se nærmere på dette og formulere noen mere presise definisjonsforslag innenfor rammen av språket L+(E;3). Det virker nærliggende å si at determinisme er det syn at alt skjer i overensstemmelse med ubrytelige og jernharde kausallover og at dersom man kjente i detalj disse lover og rekken av totale verdenstilstander i et begrenset tidsintervall ville man teoretisk sett kunne være istand til å forutsi en hvilken som helst fremtidig, såvel som fortidig, hendelse. Dette innebærer at enhver hendelse er forutbestemt. Hvis dette er hva man mener med determinisme virker det naturlig, om man arbeider med en klasse av logisk mulige verdener, slik vi gjør, å skille mellom deterministiske verdener og ikke-deterministiske verdener. En deterministisk verden kunne da oppfattes som en verden hvor alle de kausallover som gjelder oppfyller det krav som ble nevnt ovenfor, dvs. er slik at om vi har fullstendig kjennskap til disse lover og tenker oss at vi kjenner alle de totale verdenstilstander som foreligger realisert i denne verden i et begrenset tidsintervall vil alle fortidige såvel som fremtidige hendelser i denne verden kunne forutsies. Systemet av alle de kausalover som gjelder i en slik verden kunne da kalles en deterministisk teori i denne verden. I de følgende paragrafer, §8.1 - §8.4, skal vi presentere en rekke definisjoner. I det vesentlige avgrenser vi visse typer av teorier som det ikke virker uberettiget å kalle deterministiske teorier.

§8.1 Definisjoner av predikatene "Δ er en deterministisk teori i verdenen w" og "Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a"

Ønsker man å definere hva man mener med en deterministisk teori i verdenen w synes det naturlig å stille de følgende krav til en slik teori:

For det første vil det være naturlig å kreve at alle de utsagn som inngår i en slik teori er kausallover som gjelder i denne verdenen w. Det andre kravet er at en slik teori ikke i seg selv avgjør hvilken totaltilstand som foreligger realisert i verdenen w ved et vilkårlig valgt

tidspunkt. Dette innebærer at uansett hvilken totaltilstand s man tenker seg og uansett hvilket tidspunkt t man velger ut så vil teorien ikke avgjøre utsagnet at tilstanden s foreligger ved tidspunktet t. Dette kravet innebærer i en viss forstand at en deterministisk teori bare sier noe om hvilke totaltilstander som vil inntreffe gitt at visse andre har inntruffet. Den har i seg selv ikke en ubetinget og kategorisk karakter om vi tillater oss å bruke et uttrykk som er en smule ubestemt og svevende. Det tredje kravet er at en deterministisk teori utvidet med et utsagn som enten beskriver totaltilstanden ved et gitt tidspunkt, eller alle totaltilstandene som foreligger i et begrenset tidsintervall, er komplett, dvs. avgjør nøyaktig hvilke totaltilstander som foreligger ved alle andre tidspunkter. Det kan sikkert diskuteres om de kravene vi så langt har nevnt både er tilstrekkelige og nødvendige for å kunne karakterisere en teori som deterministisk. Det virker imidlertid ikke søkt å karakterisere dem som tilstrekkelige.

Vi skal betrakte en mer presis definisjon av uttrykket "Δ er en deterministisk teori i verdenen w" formulert innenfor rammen av L(E;3)+. Vi finner det imidlertid hensiktsmessig å innføre visse hjelpebegreper først.

La oss først kalle en teori, dvs. en utsagnsmengde T Inkl U for tilstandskomplett hvis og bare hvis T oppfyller de følgende krav: (i) T er konsistent. (ii) Er s en vilkårlig logisk mulig totaltilstand, ie. sêQ, og t et vilkårlig tidspunkt har vi at l(s,t) eller Neg(l(s,t)) er en logisk konsekvens av T. Bruker vi "CompS(T)" som forkortelse for "T er en tilstandskomplett utsagnsmengde" kan definisjonen formaliseres slik:

DEFINISJON 8.1.1: Vi setter : CompS(T) <->
[Cons(T) & (As)(At)(sêQ & têT. ->. (l(s,t)êk(T) v Neg(l(s,t))êk(T)))]

Vi trenger ytterligere en definisjon for å kunne formulere vårt definisjonsforslag av konstruksjonen "Δ er en deterministisk teori i w". Konjunksjonen av alle utsagn av typen l(Hist(w)(t), t) når t gjennomløper tidspunktene i et tidsintervall [t;1,t;2] der t;1<t;2 skal vi i denne paragrafen betegne med uttrykket: "g;w(t;1,t;2)". Følgende lesemåte synes intuitivt sett rimelig for uttrykket "g;w(t;1,t;2)", nemlig "Det utsagnet som beskriver totalhistorien til verdenen w i tidsintervallet fra og med t;1 til og med t;2". Den formelle definisjonen av dette uttrykket kan formuleres slik:

DEFINISJON 8.1.2:
g;w(t;1,t;2) = SNu/tê[t;1,t;2]/(l(Hist(w)(t),t))

Vi kan nå formulere mer presist det forslag til definisjon av deterministisk teori som vi skisserte ovenfor:

DEFINISJON 8.1.3: Vi sier at Δ er en deterministisk teori i verdenen w , i symboler "DetM(Δ,w)", hvis og bare hvis Δ er en ikke-tom utsagnsmengde, ie. Δ Inkl U, som oppfyller de følgende krav:

(i) (Ax)(xêΔ.->. CLov(x,w)
(ii) (As)(At)(sêQ & têT.->.(¬l(s,t)êk(Δ) & ¬ Neg(l(s,t))êk(Δ)))
(iii) (At)[têT.->. (Et')(t'êT & t'≥t & CompS(Un(Δ,{g;w(t,t')}))]

Den definisjonen vi her har gitt av deterministisk teori er, som allerede nevnt, bare en av flere mulige beslektede definisjoner som kan formuleres innenfor rammen av språket L;+(E;3) Det kan derfor være av interesse og formulere andre definisjoner og forsøke å se likheter og forskjeller mellom dem. Dette skal vi delvis gjøre nå, men også i de følgende paragrafer.

Aller først skal vi se på en variant av Definisjon 8.1.3. I den tredje klausulen i Definisjon 8.1.3 ser man at vi til ethvert tidspunkt t krever at det skal finnes et tidspunkt t' som kommer etter t og som er slik at Un(Δ,{g;w(t,t')}) er tilstandskomplett. Men vi har ikke

sagt noe om hvor langt etter tidspunktet t det andre tidspunktet t' skal komme. Det vil i denne forbindelse kunne være naturlig å innføre en parameter som vi kan variere, f. eks. ved at vi krever at avstanden mellom disse to tidspunkter i høyden skal være a der a er et reellt tall større enn 0.

Vi definerer derfor hva vi forstår med uttrykket "Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a", som vi skal forkorte med "DetM(Δ,w,a)", ved den følgende definisjon:

DEFINISJON 8.1.4: Vi sier at Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a , i symboler "DetM(Δ,w,a)", hvis og bare hvis Δ er en ikke-tom utsagnsmengde, ie. Δ Inkl U, som oppfyller de følgende krav:

(i) (Ax)(xêΔ.->. CLov(x,w) & aêReell &a>0
(ii) (As)(At)(sêQ & têT.->.(¬l(s,t)êk(Δ) & ¬ Neg(l(s,t))êk(Δ)))
(iii) (At)[têT.->. (Et')(t'êT & t+a≥t'≥t & CompS(Un(Δ,{g;w(t,t')}))))]

Man ser at vi i denne definisjonen har erstattet kravet (iii) i Definisjon 7, med det sterkere kravet: (At)[têT.->. (Et')(t'êT & t+a≥t'≥t & CompS(Un(Δ,{g;w(t,t')})))].

Vi vil forsøke å belyse egenskapene til deterministiske teorier ved å gi bevis for endel satser som gjelder for dem. I første omgang skal vi derfor se på noen satser som gjelder for den binære relasjonen DetM som vi nå har definert.

TEOREM 8.1.1: *(a) Anta DetM(Δ,w) & têT. Da gjelder følgende:*
(Et')(t'êT &t'≥t &(As)(At")(Hist(w)(t") = s.->. l(s,t")êk(ΔU{g;w(t,t')})))
(b) Anta DetM(Δ,w,a) & têT. Da gjelder følgende:
(Et')(t'êT &t+a≥t'≥t &(As)(At")(Hist(w)(t") = s.->. l(s,t")êk(ΔU{g;w(t,t')})))

Noen kommentarer kan være på sin plass i forbindelse med denne satsen. Punkt (a) uttrykker, som man ser, at dersom Δ er en deterministisk teori i verdenen w og t er et vilkårlig tidspunkt så vil ethvert utsagn av typen l(s,t") som er sant i w være med i konsekvensystemet til teorien Δ utvidet med utsagnet g;w(t,t') for et eller annet tidspunkt t' som kommer etter eller er lik t. Dette innebærer at for alle t vil det finnes et tidspunkt t' slik at teorien Δ utvidet med g;w(t,t') bare vil være sann i verdenen w eller verdener som historisk sett er ekvivalente med w. Punkt (b) i satsen uttrykker en helt analog påstand for teorier som er deterministiske i verdenen w med parameter a>0.

Bevis: Anta DetM(Δ,w) &têT. Fra definisjonen av DetM følger da eksistensen av t' der vi har: (1) t'≥t og

(2) Cons(ΔU{g;w(t,t')})
(3) (As)(At")(<s,t">êProd(Q,T).->. l(s,t")êk(ΔU{g;w(t,t')}) v
Neg(l(s,t"))êΔU{g;w(t,t')})

Anta for vilkårlige objekter s,t" at (4) [Hist(w)](t") =s. Da har vi <s,t">êProd(Q,T) og følgelig ved hjelp av (3) at:

(5) l(s,t")êk(ΔU{g;w(t,t')}) v Neg(l(s,t"))êΔU{g;w(t,t')})

Siden DetM(Δ,w) har vi per definisjon (6) (Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) og derfor (Ax)(xêΔ.->.True(w,x)). Da følger åpenbart (7) True(w,SNu(Δ)). Vi har imidlertid også (8) True(w,g;w(t,t')). Fra disse to forhold følger derfor (9) True(w,SNu(ΔU{g;w(t,t')})) Fra (4) har vi ved hjelp av en hjelpesetning som vi tidligere har bevist, at: (10) True(w,l(s,t")). Det er nå utelukket at Neg(l(s,t"))êk(ΔU{g;w(t,t')}). For fra dette og (9) følger ¬True(w,l(s,t")) som strider mot (10). Vi har jo, som man husker, generelt for alle Δ,x og w at hvis xêK(Δ) & True(w,SN(Δ)) så gjelder True(w,x). Siden ¬(Neg(l(s,t"))êk(ΔU{g;w(t,t')})) følger i lys av

(5) at l(s,t")êk(ΔU{g;w(t,t')}). Siden s og t" var vilkårlige objekter som oppfylte (4) har vi derfor bevist:

(As)(At")(Hist(w)(t") = s.->. l(s,t")êk(ΔU{g;w(t,t')})). Dette og (1) viser at satsens punkt (a) holder. Punkt (b) i satsen bevises helt analogt. Vi overlater her detaljene til leseren. **Q.E.D.**

Vi skal vise ytterligere en sats som i innhold er relatert til den ovenfor. Også denne satsen er todelt. Vi kommenterer bare det første punktet i satsen fordi den kommentarene til den andre delen blir helt analoge. Punkt (a) i satsen uttrykker at dersom Δ er en deterministisk teori i verdenen w, t er et vilkårlig tidspunkt og f er historien til verdenen w så har vi at sannhetsmengden til teorien Δ utvidet med utsagnet g;w(t,t') for et eller annet tidspunkt t' der t'≥t er identisk med G(f), dvs. mengden av alle de mulige verdener hvis historie er f. Dette gjelder under den forusetning at hvis to verdener er historisk sett identiske så gjelder de samme kausallover i dem. Dette er en premiss som virker svært rimelig. Det bør bemerkes på dette punkt at hvis fêExp(Q,T) og Hist(w)=f for en eller annen mulig verden w så har man at Mg(w': w'~w)=G(f).[4] Dette innebærer at konsekventen i punkt (a) i satsen også kan formuleres slik:

(Et')(t'≥t & s(SNu(ΔU{g;w(t,t')})) = Mg(w': w'~w))

En tilsvarende bemerkning gjelder naturligvis også konsekventen i punkt (b).

TEOREM 8.1.2: *(a) Anta DetM(Δ,w) & têT & Hist(w)=f & wêI. Anta videre at det følgende gjelder for alle xêU og w;1,w;2êI:*

CLov(x,w;1) & w;1~w;2.->. CLov(x,w;2)

Holder disse forutsetningene gjelder:

(Et')(t'≥t & s(SNu(ΔU{g;w(t,t')})) = G(f))

(b) Anta DetM(Δ,w,a) & têT & Hist(w)=f & wêI. Anta videre at det følgende gjelder for alle xêU og w;1,w;2êI:

CLov(x,w;1) & w;1~w;2.->. CLov(x,w;2)

Holder disse forutsetningene gjelder:

(Et')(t+a≥t'≥t & s(SNu(ΔU{g;w(t,t')})) = G(f))

Bevis: (a) Anta (1) DetM(Δ,w) & têT & Hist(w)=f & wêI. Fra dette og det forrige teoremet følger at det finnes et tidspunkt t' der vi har:

t'êT &t'>t &(As)(At")(Hist(w)(t") = s.->. l(s,t")êk(ΔU{g;w(t,t')}))

Fra dette og (1) følger (2) (At")(t"êT.->.l(f(t"),t")êk(ΔU{g;w(t,t')}))

Det vil nå være tilstrekkelig å bevise: s(SNu(ΔU{g;w(t,t')})) = G(f). (A) Vi viser først inklusjonen mot høyre: Anta for vilkårlig mulig verden w;1 at

(3) w;1ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). I lys av (2) ovenfor følger da :

(At)(têT -> True(w;1,l(f(t),t)). Men dette innebærer at (At)(têT.-> TL(f(t),w;1,t). Men fra dette og definisjonen av G har vi w;1êG(f). (B) Vi viser så at inklusjonen mot venstre holder. Anta derfor på den annen side at w;1êG(f). Siden historien til w er f følger det at w:1 og w er historisk sett ekvivalente. Dette i sin tur innebærer at (4) w;1ês(g;w(t,t')). Nå har vi fra den første premissen i teoremet og definisjonen av utrykket "DetM(Δ,w)" at (Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)). Fra dette og den andre hovedpremissen i teoremet følger at (Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w:1)). Men vi har (Ax)(Aw)(CLov(x,w).->. True(w,x)). Derfor følger: (Ax)(xêΔ.->. True(w;1,x)). Herav: (5) w;1ês(SNu(Δ)). Men fra (4) og (5) kan vi selvfølgelig slutte: w;1ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Dette viser at også inklusjonen mot venstre holder og avslutter vårt bevis for satsens første punkt. Punkt (b) bevises imidlertid helt analogt. Vi overlater her detaljene til leseren om vedkommende finner en detaljert verifikasjon nødvendig. **Q.E.D.**

[4] Vi overlater beviset for denne påstand til leseren som en øvelse.

En viktig egenskap ved deterministiske teorier er at de ikke tillater at verdensforløpet forgrener seg. La oss tenke oss at vi har to verdener w;1 og w;2 som har felles historie opp til og inkludert tidspunktet t, men som historisk sett divergerer etter tidspunktet t. Det virker da naturlig å hevde at det under disse omstendigheter ikke kan finnes noen Δ som er en deterministisk teori, og fullstendig sådan, som gjelder i både w;1 og w;2. Man kunne her nesten være fristet til å si at dette burde være et adekvanskrav til enhver definisjon av uttrykket "deterministisk teori". Man kan derfor spørre om ikke følgende påstand lar seg bevise:

(+) Anta w;1,w;2êI & t;1êT og
(Aw;1)(Aw;2)(Ax)(CLov(x,w;1)&w;1~w;2.-> CLov(x,w;2))
Anta videre at:
(At)(t≤t;1.->.Hist(w;1)(t) = Hist(w;2)(t)) &
(Et)(t>t;1 &Hist(w;1) ≠ Hist(w;2)). Da gjelder:
¬(EΔ)(DetM(Δ,w;1) &DetM(Δ,w;2))

Desverre synes det vanskelig å gi noe bevis for denne setningen. Vanskelig-hetene skyldes krav (iii) i Definisjon 8.1.3 – noe man vil se ganske raskt når man forsøker å bevise satsen på basis av vår definisjon av "DetM(Δ,w)". Derimot kan vi bevise den følgende relaterte sats som gjelder for predikatet "DetM(Δ,w,a)":

TEOREM 8.1.3: *Anta w;1,w;2êI & t;1êT. Anta aêReell &a>0. Anta videre at*
(Aw;1)(Aw;2)(Ax)(CLov(x,w;1)&w;1~w;2.-> CLov(x,w;2)). Anta dessuten:
(At)(t≤t;1.->.Hist(w;1)(t) = Hist(w;2)(t)) &
(Et)(t>t;1 &Hist(w;1) ≠ Hist(w;2)) da gjelder:
¬(EΔ)(DetM(Δ,w;1,a) &DetM(Δ,w;2,a))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder, men samtidig , for reduktio ad absurdum, at konsekventen er usann. I så fall vil det finnes en teori Δ der:
(1) DetM(Δ,w;1,a) &DetM(Δ,w;2,a). I lys av de aksiomer som inngår i teorien E;3+[HP1] finnes funksjoner f;1 og f;2 slik at (2) Hist(w;1)=f;1 & Hist(w;2)=f;2. Det skulle også være klart at det må finnes et tidspunkt t;2 som er slik at
(3) t;2+a < t;1. Ved hjelp av det foregående teorem har vi da at det må finnes t' og t" slik at:
(4) t;2+a ≥ t'≥t;2 & s(SNu(ΔU{g;w;1(t;2,t')})=G(f;1)
(5) t;2+a ≥ t"≥t;2 & s(SNu(ΔU{g;w;2(t;2,t")})=G(f;2)
Sett nå t;3 = Max(t',t"). Vi har
(6) g;w;1(t;2,t;3) = SNu/xê[t;2,t;3]/(l(Hist(w;1)(x),x))
(7) g;w;2(t;2,t;3) = SNu/xê[t;2,t;3]/(l(Hist(w;2)(x),x))
Anta nå for vilkårlig w' at (8) w'êG(f;1). Fra definisjonen av "G(f)" følger da (At)(têT.->. TL(f;1(t),w',t)). Nå har vi Hist(w;1)=f;1. Det følger derfor at
(At)(têT.->.TL(Hist(w;1)(t),w',t)). Fra dette kan vi i sin tur utlede :
(At)(têT.->. w'ês(l(Hist(w;1)(t),t)). Herav:
(At')(t'≤t;2+a.->. w'ês(l(Hist(w;1)(t'),t')) Det følger at vi har:
(9) w'êSNu/xê[t;2,t;3]/(l(Hist(w;1)(x),x))
Nå har vi også ifølge den siste premissen i teoremet at:
(At)(t<t;1.->. Hist(w;1)(t)=Hist(w;2)(t))
Det følger fra dette og (9) at: (10) w'êSNu/xê[t;2,t;3]/(l(Hist(w;2)(x),x))
Fra (8) og (4) følger w'êSNu(Δ). Dette, (10) og (5) impliserer w'êG(f;2). Siden w' var et vilkårlig objekt har vi nå vist at G(f;1) Inkl G(f;2). På en helt analog måte viser vi at G(f;2) Inkl G(f;1). Det følger da at (11) G(f;1) = G(f;2). Anta mot formodning at f;1≠f;2. Da må

det finnes et t;0êT som er slik at (+) f;1(t;0)≠f;2(t;0). Nå forutsetter vi jo at Hist(w;1)=f;1. Fra dette følger at (12) w;1êG(f;1). Man kan i denne forbindelse konsultere en hjelpesetning som vi har bevist tidligere. Fra dette og (11) følger (13) w;1êG(f;2). Fra (12) og (13) og definisjonen av "G(f)" har vi:

(At)(têT.->.TL(f;1(t),w;1,t)) & (At)(têT.->.TL(f;2(t),w;1,t)) .

Dette i sin tur impliserer at TL(f;1(t;0),w;1,t;0) &TL(f;2(t;0),w;1,t;0). Men fra dette og våre aksiomer for predikatet TL følger f;1(t;0)=f;2(t;0) som åpenbart strider mot (+) ovenfor. Det følger at f;1=f;2 og derfor at Hist(w;1) = Hist(w;2). Men dette impliserer (At)(têT.->.Hist(w;1)(t)=Hist(w;2)(t)) som strider mot den siste premissen i teoremet. Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

§8.2 Definisjon av predikatet "Δ er en deterministisk teori"

Som nevnt ovenfor kan det være av interesse og formulere andre definisjoner av hva som eventuelt kan menes med deterministisk teorier og forsøke å se likheter og forskjeller mellom dem. Vi skal i denne paragrafen og de to neste, se på en del andre forslag. I denne forbindelse starter vi med den følgende definisjon i det vi bemerker at uttrykket "Det(X)" brukes som forkortelse for "X er en deterministisk teori":

DEFINISJON 8.2.1: Det(X). <->.

(a) X Inkl U
(b) Mng(X) &X≠ø
(c) Cons(X)
(d) (Ax)(Aw)(xêX&wês(SN(X)).->. CLov(x,w))
(e) (Ax)(xêQ -> (At)(Tp(t).->. [¬(LKm(l(x,t),X))
& ¬(LKm(Neg(l(x,t)),X))]))
(f) (Es;0)(Et;0)(Tp(t;0) & s;0êQ & Cons(Un(X,{l(s;0,t;0)}) &
(As)(At)[sêQ & Tp(t).->.LKm(l(s,t), Un(X,{l(s;0,t;0)})) v
LKm(Neg(l(s,t)), Un(X,{l(s;0,t;0)}))])

Sammenligner man denne definisjonen med den første i forrige paragraf legger man med en gang merke til at vi her definerer en unær predikatkonstruksjon, "X er en deterministisk teori", mens vi ovenfor definerte en binær predikatkonstruksjon "Δ er en deterministisk teori i verdenen w". Dette er den mest åpenbare forskjellen mellom de to definisjonene. Man ser også med en gang at det andre kravet i Definisjon 8.1.3 og Definisjon 8.1.4 er identisk med kravet (e) i denne definisjonen. I begge tilfelle vil deterministiske teorier være ikke-tomme, konsistente, utsagns-mengder hvor alle utsagnene er kausallover. Det som kanskje er det mest vesentlige er at kravet (f) i definisjonen ovenfor er helt forskjellig fra det siste kravet i de to definisjonene som vi betraktet i forrige paragraf. Er X en deterministisk teori i den forstand som er definert ved Definisjon 8.2.1 krever vi nå bare at det skal finnes en totaltilstand s;0 og et bestemt tidspunkt t;0 slik at om vi utvider teorien X med utsagnet l(s;0,t;0) så får vi som resultat en konsistent teori som er fullstendig med hensyn på alle utsagn av typen l(s,t) der <s,t>êProd(Q,T). Dette innebærer – som man ser fra kravet (f) – at for alle utsagn av typen l(s,t), der <s,t>êProd(Q,T), har vi at enten l(s,t) eller negasjonen av dette utsagn er med i konsekvenssytemet til X utvidet med l(s;0,t;0).

Selvom de to definisjonene synes beslektet, og selvom de to begreper som defineres definisjonsmessig er helt forskjellige, er det ikke helt lett å få øye på, og bevise, et lite antall setninger som klart karakteriserer forholdet mellom dem.

Imidlertid skal vi se på et teorem som kan brukes til å illustrere forskjellen mellom de to definisjonene. En teori X vil bli spesifisert som under visse forutsetninger er slik at Det(X), men hvor vi ikke i alle verdener w, hvor alle utsagnene i X er sanne, har DetM(X,w).

TEOREM 8.2.1: *Anta Cd(Q)>2. Anta t;0êT. La f êExp(Q,T). Mao. er f en funksjon som til hvert tidspunkt t tilordner en totaltilstand. Sett Δ;1=Mg(C(l(f(t;0)t;0),l(f(t),t)) : t>t;0) og sett Δ;2 = Mg(C(l(f(t;0)t;0),l(f(t),t)) : t≤t;0). Sett videre Δ=Δ;1UΔ;2. Anta nå at de følgende ting holder.*

(a) For alle gêExp(Q,T) finnes det en verden w slik at Hist(w)=g

(b) (Ax)(Aw)(xêΔ&wês(SN(Δ)).->. CLov(x,w))

Holder alle disse forutsetningene har vi på den ene side at Det(Δ), men på den annen side har vi også at (Ew)(wês(SN(Δ)) & ¬DetM(Δ,w)).

La oss med en gang bemerke her at forutsetningene i dette teoremet ikke er særlig realistiske. Men det spiller en underordnet rolle akkurat her fordi vi kun er interessert i de rent begrepsmessige forskjellene mellom de to predikatene "DetM(X,w)" og Det(X).

Bevis: [5] Anta forutsetningene i teoremet holder. Vi skal først vise at Det(Δ). Vi må da selvfølgelig vise at Δ oppfyller alle de kravene som er nevnt i Defini-sjon 8.2.1.

(i) - (ii) Det skulle være helt trivielt i lys av de forutsetningene som inngår i teoremet at Δ må være en ikke-tom mengde, og dessuten at den er en utsagnsmengde.

(iii) Vi må imidlertid vise at Δ er konsistent, dvs. at det finnes en verden w hvor alle utsagnene i Δ er sanne. Anta at (1) f(t;0)=s. Man kan da velge en funksjon g i mengden Exp(Q,T) som er slik at (2) g(t;0)≠s. Fra forutsetning (a) følger da at G(g)≠ø. Det finnes derfor en wêI der vi har wêG(g). Men fra dette, (1) og (2) følger at l(f(t;0),t;0) er usann i verdenen w. Men dette vil si at antesedenten i alle kondisjonalutsagnene som inngår i Δ;1 og Δ;2 er usann i w. I sin tur innebærer dette at alle kondisjonalutsagnene i Δ;1UΔ;2 er sanne i w. Det følger at vi derfor har (Ax)(xêΔ.->.True(w,x)). Dette viser at teorien er konsistent.

(iv) At vi har (Ax)(Aw)(xêΔ&wês(SN(Δ)).->. CLov(x,w)) følger direkte, og helt trivielt, fra forutsetning (b) i teoremet.

(v) Vi må imidlertid vise at vi har:

(1) (Ax)(xêQ -> (At)(Tp(t).->.[¬(LKm(l(x,t),Δ)) & ¬(LKm(Neg(l(x,t)),Δ))]))

Anta derfor for vilkårlige entiteter x,t at (2) <x,t>êProd(Q,T). Vi må først vise at det finnes en mulig verden w hvor alle utsagnene i Δ er sanne, og hvor vi dessuten har at utsagnet l(x,t) er sant. Det er to muligheter: (a) t=t;0. Er da x=f(t;0) kan vi velge en verden wêG(f). I en slik verden vil alle utsagnene i Δ være sanne, men også l(x,t). Er x≠f(t;0) kan vi velge en hvilken som helst verden w hvor l(x,t) er sann. I en slik verden vil, som man ser, alle antesedentene i de kondisjonalutsagn som inngår i Δ være usanne, og derfor alle kondisjonalutsagnene være sanne. (b) t≠t;0. I så fall kan vi velge ut en funksjon hêExp(Q,T) der h(t;0)≠f(t;0) og h(t)=x. Vi kan dernest velge en verden i G(h), la oss si w. I denne verden vil utsagnet l(x,t) være sant, men det vil også alle utsagnene i Δ, siden de i denne verden har en usann antesedent. Vi har dermed vist at i alle tilfelle finnes det en verden w hvor l(x,t) er sann og alle utsagnene i Δ er sanne. Dette innebærer at vi må ha ¬(LKm(Neg(l(x,t)),Δ)).

Vi må imidlertid også vise at det finnes en verden hvor alle utsagnene i Δ er sanne, men hvor l(x,t) er usann. Dette kan gjøres på en lignende måte.

(a) Anta t = t;0. Da kan vi, siden Cd(Q)>2, velge en funksjon hêExp(Q,T) der h(t) er forskjellig fra såvel f(t;0) som x. Det vil da finnes verdener i mengden G(h). Vi velger ut en slik, la oss kalle den w. Da vil l(x,t) være usann i w, men det vil også alle antesedentene som inngår i kondisjonalutsagnene i Δ være. Da er alle utsagnene i Δ sanne. (b) Er t≠t;0 kan vi

---

[5] Beviset for denne satsen er temmelig langt. Lesere som er mindre interessert i de tekniske detaljene kan derfor hoppe over det.

også velge ut en funksjon, la oss si h, fra mengden Exp(Q,T) som er slik at h(t;0) ≠ f(t;0) & h(t)≠x. Da vil enhver verden som er med i G(h), og denne verden er ikke-tom, være slik at l(x,t) er usann i w, mens alle utsagnene i Δ er sanne i w fordi de alle har usann antesedent i w. I begge tilfelle finnes det en verden w der alle utsagnene i Δ er sanne og l(x,t) er usann. Dette innebærer at vi har ¬(LK(l(x,t),Δ)).

(vi) Det vil være nok å vise , vedrørende det sjette kravet i Definisjon 8, at man har det følgende under forutsetning av at s;0=f(t;0):

(+) (As)(At)(sêQ & têT.->. LKm(l(s,t), ΔU{l(s;0,t;0)})
v LKm(Neg(l(s,t)), ΔU{l(s;0,t;0)})

Dette er tilstrekkelig fordi vi nettopp ifølge forutsetningene i teoremet har at f(t;0)=s;0êQ & t;0êT. At ΔU{l(s;0,t;0)} er konsistent fremgår temmelig direkte fra definisjonen av Δ.

Vi skal nå først vise: (‡) s(SNu(ΔU{l(s;0,t;0)})) =G(f) der f er som beskrevet i forutsetningene i teoremet. Vi beviser først inklusjonen mot høyre. (a) Anta derfor for vilkårlig w at (0) wês(SNu(ΔU{l(s;0,t;0)})). Da følger:

(1) (Ax)(xêΔ;1.->. True(w,x))
(2) (Ax)(xêΔ;2.->. True(w,x))
(3) wês(l(s;0,t;0))

Fra (1) og (2) og definisjonene av Δ;1 og Δ;2 har vi:

(4) (At)(t>t;0. ->. wês(C(l(f(t;0),t;0),l(f(t),t)))
(5) (At)(t<t;0. ->. wês(C(l(f(t;0),t;0),l(f(t),t)))

Fra (3),(4) og (5) følger: (At)(têT.->. wês(l(f(t),t))). Men dette innebærer i lys av definisjonene som er gitt av operatorene l og G at wêG(f).

(b) Vi beviser så inklusjonen mot venstre i (‡). Anta på den annen side for vilkårlig w at wêG(f). Da har vi (6) wês(l(f(t;0),t;0)). Videre har vi :

(7) (At)(têT.->. wês(l(f(t),t)).

Fra (6) og (7) følger (3), (4) og (5) ovenfor. I sin tur impliserer disse formlene (1) og (2). Fra (1) og (2) kan man så utlede (0). Dette viser at også inklusjonen mot venstre holder.

Anta nå at <s,t>êProd(Q,T) for vilkårlige objekter s og t. Det er da to muligheter: (i) f(t)=s. I så fall har vi G(f) Inkl s(l(s,t)), og derfor i lys av (‡) at LKm(l(s,t),ΔU{l(s;0,t;0)}). (ii) f(t)≠s. Anta w'êG(f) for vilkårlig w'. Anta for reduktio ad absurdum at w'ês(l(s,t)). Da har vi TL(s,w',t). Videre har vi Hist(w')(t) = s. Men er w'êG(f) følger f=Hist(w'). Vi må i så fall ha f(t)=s som er umulig. Vi har derfor at ¬(w'ês(l(s,t))), og derfor w'ês(Neg(l(s,t))). Siden w' var et vilkårlig element i G(f) følger at G(f) Inkl s(Neg(l(s,t))). Dette og (‡) impliserer: LKm(Neg(l(s,t)),ΔU{l(s;0,t;0)}). I begge tilfelle holder konsekventen i (+). Dette avslutter vårt bevis for at Δ oppfyller alle de krav som trengs for at vi skal ha Det(Δ).

Vi må imidlertid også vise at:

(++) (Ew)(wês(SNu(Δ)) & ¬DetM(Δ,w))

Fra forutsetningene i teoremet har vi at fêExp(Q,T). Fra forutsetning (a) følger da at det finnes en wêI slik at Hist(w) = f. Dette innebærer (jmf. lemma) at
(1) wêG(f). Fra det vi har bevist ovenfor følger at (2) wês(SNu(Δ)). Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise: (*) ¬DetM(Δ,w). For dette formål er det i sin tur nok å vise at den tredje klausulen i definisjonen av "DetM(Δ,w)" ikke er oppfylt, dette innebærer at det er nok å vise:

¬(At)(têT.->.(Et')(t'êT &t'≥t & CompS(ΔU{g;w(t,t')})))

Mao. bør vi vise at det finnes t der:

(**) têT & (At')(t'êT &t'≥t.->.¬CompS(ΔU{g;w(t,t')}))

Det er åpenbart, i lys av våre tidsteoretiske aksiomer, at det finnes t der
(3) têT &t>t;0. Anta t' er et vilkårlig objekt der (4) t'≥t & t'êT. Vi må nå vise, i denne forbindelse bør man konsultere definisjonen av CompS, at hvis ΔU{g;w(t,t')} er konsistent så har vi:

¬(As)(At)(<s,t>êProd(Q,T).->. l(s,t)êk(ΔU{g;w(t,t')}) v

Neg(l(s,t))êk(ΔU{g;w(t,t')}))

Anta derfor at (5) Cons(ΔU{g;w(t,t')}). Vår oppgave er da å vise at det finnes en s;2êQ &t;2êT hvor:

(6) ¬(l(s;2,t;2)êk(ΔU{g;w(t,t')}))

(7) ¬(Neg(l(s;2,t;2))êk(ΔU{g;w(t,t')}))

Det finnes åpenbart objekter s;2 og t;2 der (7.1) s;2êQ og t;2>t'. Vi må derfor vise at det finnes to mulige verdener w;1 og w;2 som er slik at:

(8) w;1ês(ΔU{g;w(t,t')}) & w;1ês(l(s;2,t;2))

(9) w;2ês(ΔU{g;w(t,t')}) & ¬(w;2ês(l(s;2,t;2)))

(A) Vi skal først vise at (8) holder. Fra (3), (4) og (7.1) følger (10) t;0<t≤t'<t;2. Det følger derfor at det finnes en q;1êExp(Q,T) der:

(i) q,1(t;0)≠f(t;0)

(ii) (At")(t≤t"≤t' .->. q;1(t") = f(t"))

(iii) q;1(t;2) = s;2

Siden q;1êExp(Q,T) har vi ved hjelp av forutsetning (a) i teoremet at det finnes en w;1 der (11) w;1êG(q;1). Fra (11) og (i) følger: ¬(w;1ês(l(f(t;0),t;0))). Dette innebærer at antesedenten i alle de kondisjonalutsagn som inngår i Δ er usann og derfor at alle kondisjonalutsagnene i Δ er sanne. Vi har derfor

(13) w;1ês(SNu(Δ)). Fra (ii) følger (14) w;1ês(g;w(t,t')). For anta for vilkårlig x at (15) xê[t,t']. Da har vi i lys av (ii) at (16) q;1(x)=f(x). Nå har vi w;1êG(q;1). Da følger q;1=Hist(w;1). Vi har også fra (1) at (17) Hist(w)=f. Vi må derfor ha w;1ês(l(q;1(x),x))). I lys av (16) og (17) følger w;1ês(l(Hist(w)(x),x))). Siden x var et vilkårlig objekt som var slik at (15) har vi derfor:

(Ax)(xê[t,t'].->. w;1ês(l(Hist(w)(x),x))).

Dette impliserer:

w;1ês(SNu/xê[t,t']/(l(Hist(w)(x),x)))

som per definisjon innebærer at w;1ê(g;w(t,t')) ie. (14). Fra (13) og (14) følger da w;1ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Men siden w;1êG(q;1) & q;1(t;2)=s;2 har vi w;1ês(l(s;2.t;2)). Dette viser at (8) holder.

(B) Vi viser nå at (9) ovenfor holder. På samme måte som under (A) skulle det være klart at det finnes en q;2 der q;2êExp(Q,T) hvor:

(I) q;2(t;0)≠f(t;0)

(II) (Ax)(xê[t,t']. ->. q;2(x) = f(x))

(III) q;2(t;2) ≠ s;2

I lys av forutsetningen (a) i satsen finnes det w;2 der w;2êI og hvor vi har (18) w;2êG(q;2). Dette innebærer at Hist(w;2)=q;2. På samme vis som under (A) beviser vi : (20) w;2ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Men i lys av (III), (18) og definisjonen av operasjonen l har vi i dette tilfellet ¬(w;2ês(l(s;2,t;2))). Dette viser at (9) holder. Dette avslutter vårt bevis for (**), og dermed vårt bevis for teoremet. **Q.E.D.**

§8.3 Definisjon av predikatet "Δ er en deterministisk teori i verdenen w relativt til tidspunktet t".

La oss så studere følgende definisjon, i det vi nå definerer hva vi vil forstå med uttrykket "X en deterministisk teori i w relativt til tidspunktet t" , og benytter forkortelsen "Det(X,w,t)" for dette uttrykk:

DEFINISJON 8.3.1: Det(X,w,t) <->

(a) Mng(X) &X≠ø

(b) X Inkl U

(c) (Ax)(xêX.->.CLov(x,w))

(d) (Ax)(At)(Tp(t) & xêQ.->. [¬(LKm(l(x,t),X)) &¬(LKm(Neg(l(x,t)),X))])
(e) (AZ)(Z= Un(X,{ l((ix)(TL(x,w,t),t)}).->.
(As)(At')(sêQ & Tp(t') & t < t'.->. LKm(l(s,t'), Z)
v LKm(Neg(l(s,t')), Z))

Enkelte kommentarer til denne definisjonen kan være på sin plass. Betrakter man definisjonen ser man for det første at hvis X er en deterministisk teori i verdenen w relativt til tidspunktet t, så må X være en ikke-tom, konsistent, utsagnsmengde som bare inneholder kausalover som gjelder i verdenen w. De tre første kravene i definisjonen uttrykker akkurat dette. Videre må det være slik at teorien ikke avgjør noen utsagn av typen "totaltilstanden s foreligger realisert ved tidspunktet t", dvs. ikke for noen tilstand s og noe tidspunkt t er det slik at utsagnet l(s,t), eller negasjonen av dette utsagn, er med i konsekvensmengden til teorien X. Dette fremgår av det fjerde kravet i definisjonen. Dette krav er forsåvidt akkurat det samme som krav (ii) i Definisjonen 8.1.3 og Definisjon 8.1.4 , samt krav (e) i Definisjon 8.2.1. La oss se litt på det siste kravet, (e). Vi har at (ix)(TL(x,w,t)) er den totaltilstanden som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w. Det følger derfor at l((ix)(TL(x,w,t)),t) er det utsagn som sier at denne tilstand foreligger realisert ved tidspunktet t. Det kravet (e) derfor sier er at hvis man tenker seg at man utvider teorien X med dette utsagn får man en teori som avgjør ethvert utsagn av typen l(s',t') hvor s' er en eller annen totaltilstand og t' er et eller annet tidspunkt som kommer etter t'. Dette innebærer at en deterministisk teori i denne forstand bare avgjør hvordan verdensforløpet vil være ved tidspunkter som kommer etter tidspunktet t. En slik teori sier intet om verdensforløpet før tidspunktet t.

Denne definisjonen er heller ikke så lett å relatere til vår første definisjon, nemlig definisjonen av uttrykket "Δ er en deterministisk teori i verdenen w". Vi har nemlig ikke at hvis DetM(X,w) og têT så gjelder: Det(X,w,t). Man kan spørre om det omvendte holder. Har vi om wêI &(At)(têT.->. Det(X,w,t) at DetM(X,w) ? Dette holder imidlertid ikke. Det determinisme-begrep som er fiksert ved Definisjon 8.1.3 er derfor i en viss henseender vanskelig å sammenligne med det determinisme-begrep som er innført ved Definisjon 8.3.1. Vi skal imidlertid se mer på de sammenhenger som består mellom våre ulike determinisme-begreper i §8.5.

§8.4 Definisjon av predikatet "Δ er en strengt deterministisk teori"

I denne paragrafen skal vi innføre ytterligere et determinismebegrep. Det har et visst slektskap med begrepet "Δ er en deterministisk teori" som vi introduserte i §8.2 og kan oppfattes fremkommet fra dette ved å erstatte det siste kravet i Definisjon 8 med et noe sterkere krav. Vi definerer hva som skal forstås med "X er en *strengt* deterministisk teori", i symboler "SDet(X)" ved den følgende definisjon:

DEFINISJON 8.4.1: SDet(X) <->
(a) Mng(X) &X≠ø
(b) X Inkl U
(c) Cons(X)
(d) (Ax)(Aw)(xêX&wês(SN(X)).->. CLov(x,w))
(e) (Ax)(At)(Tp(t) & xêQ.->. [¬(LKm(l(x,t),X))
&¬(LKm(Neg(l(x,t)),X))])
(f) (As)(At)[Tp(t) & sêQ.->.(As´)(At´)[s´êQ & Tp(t´).->.
LKm(l(s´,t´), Un(X,{l(s,t)}))
v LKm(Neg(l(s´,t´)), Un(X,{l(s,t)}))]]

Sammenligner man denne definisjonen med Definisjon 8.1.3 ser man at vi også her definerer en unær konstruksjon "X er en strengt deterministisk teori" og ikke en binær konstruksjon som i Definisjon 8.1.3, hvor vi fastsetter betydningen til uttrykket "X er en deterministisk teori i verdenen w". Dessuten ser man at definiens i definisjonen ovenfor, slik som antydet innledningsvis, er identisk med definiens i Definisjon 8.2.1, bortsett fra at vi nå har endret det siste kravet.

Igjen er det desverre slik at det ikke er så helt lett å sammenligne Definisjon 8.1.3 og Definisjon 8.4.1. Imidlertid synes det determinisme-begrep som avgrenses av Definisjon 8.4.1 å være mer restriktivt og i en viss forstand "sterkere" enn det vi avgrenset ved Definisjon 8.1.3.

§8.5 Om sammenhengen mellom de forskjellige determinismebegrepene som har blitt innført.

I forbindelse med Definisjon 8.4.1 kan man stille en rekke spørsmål. Anta X er en strengt deterministisk teori og at alle utsagnene i X er sanne i den logisk mulige verden w, ie. anta:

SDet(X) & wêI&(Ax)(xêX.->. True(w,x)).

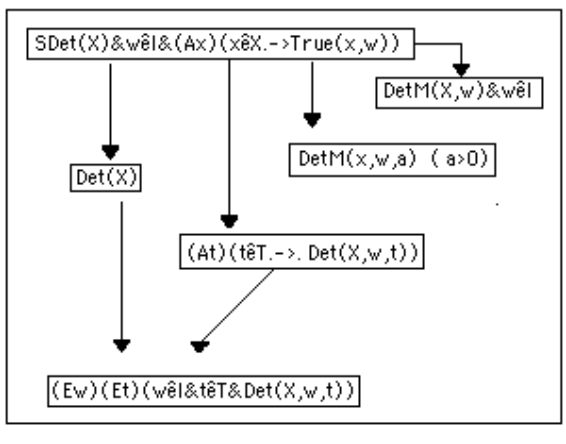
Kan vi da slutte at X er en deterministisk teori i den betydning som er angitt ved Definisjon 8.1.3, mao. at DetM(X,w) ? Dette spørsmål mener vi at kan besvares bekreftende. Vi gir beviset nedenfor.

Sammenligner man strengt deterministiske teorier med det som i Definisjon 8 ble omtalt som deterministiske teorier ser man lett at alle strengt deterministiske teorier også må være deterministiske teorier. Vi har altså:

SDet(X) .->. Det (X).

Sammenligner man tilslutt Definisjon 8.2.1 og Definisjon 8.3.1 er det mulig å bevise følgende: Er X en deterministisk teori , Det(X), så kan man slutte at det finnes en mulig verden w og at X er en deterministisk teori relativt til et eller annet tidspunkt i denne verden w, mao. at (Ew)(Et)(wêI&têT & Det(X,w,t)). De påstandene vi nå har fremsatt, men ikke gitt bevis for, har vi forsøkt å sammenfatte i FIGUR 1.

FIGUR 1



Det følgende teorem angir imidlertid de viktigste av de sammenhengene mellom disse ulike begrepene som vi så langt har nevnt.

TEOREM 8.5.1: *Anta X er en utsagnsmengde. Da gjelder de følgende påstander:*

(a) *SDet(X) -> Det(X)*
(b) *Det(X) -> (Ew)(Et)(wêI & têT & Det(X,w,t))*
(c) *SDet(X) & wêI &wês(SNu(X)) -> (Aa)(aêReell & a>0.->DetM(X,w,a))*
(d) *SDet(X) & wêI &wês(SNu(X)) -> DetM(X,w)*
(e) *Det(X) -> (Ew)(wês(SNu(X)) &(Et)(têT &(Aw')(w'ês(SNu(X)) & Hist(w')(t)=Hist(w)(t). -> w'~w)))*
(f) *SDet(X) &wês(SNu(X)) .-> (At)(têT -> Det(X,w,t))*

Disse resultatene er, som nevnt oppsummert på den figuren vi har gitt tidligere, nemlig FIGUR 1.

Bevis:

(a) Dette punktet er i det vesentlige trivielt. Siden Q og T er ikke-tomme finnes s;0 og t;0 slik at <s;0,t;0>êProd(Q,T). Fra den siste klausulen i Defini-sjon 8.4.1 følger da

(As)(At)(<s,t>êProd(Q,T) ->
l(s,t)êk(XU{l(s;0,t;0)}) v Neg(l(s,t))êk(XU{l(s;0,t;0)})

Dette impliserer åpenbart den siste klausulen i Definisjon 8.2.1

(b) Også denne påstanden er temmelig triviell. Vi gir likevel et bevis for tydelighetens skyld. Anta Det(X). Da har vi at det finnes s;0 t;0 slik at

(i) X Inkl U
(ii) Mng(X)
(iii) Cons(X)
(iv) Ax)(Aw)(xêX&wês(SN(X)).->. CLov(x,w))
(v) (Ax)(xêQ -> (At)(Tp(t).->. [¬(LKm(l(x,t),X)
& ¬(LKm(Neg(l(x,t)),X))]))
(vi) Tp(t;0) & s;0êQ & Cons(Un(X,{l(s;0,t;0)}) &
(As)(At)[sêQ & Tp(t).->.LKm(l(s,t), Un(X,{l(s;0,t;0)})) v
LKm(Neg(l(s,t)), Un(X,{l(s;0,t;0)}))]

Fra den tredje konjunkten i (vi) følger at det finnes w;0êI slik at
(2) w;0ês(SNu(X)) & w;0ês(l(s;0,t;0)). Da følger i lys av definisjonen av operasjonen l at
(3) TL(s;0,t;0,w;0) Vi har da s;0=(ix)TL(x,w;0,t;0) Fra (2) og (iv) følger åpenbart:
(4) (Ax)(xêX -> CLov(x,w;0)

Det følger herav siden (Ax)(Aw)(CLov(x,w).-> True(w,x)) at vi må ha:
(5) (Ax)(xêX -> True(w;0,x)) Fra den siste konjunkten i (vi) følger:
(6) (As)(At)[sêQ & Tp(t)& t;0<t.->.
LKm(l(s,t), Un(X,{l(s;0,t;0)})) v LKm(Neg(l(s,t)), Un(X,{l(s;0,t;0)}))]

Fra (i), (ii), (v), (4), (5) og (7) og Definisjon 8.3.1 følger: Det(X,w;0,t;0). Herav følger (Ew)(Et)(wêI & têT & Det(X,w,t)) som er det vi ønsker.

(c) Anta (0) SDet(X) &wêI &wês(SNu(X)) &aêReell & a>0. Fra definisjonen av SDet følger da:

(1) Mng(X) & X Inkl U & Cons(X) &
(Ax)(Aw)(xêX &wês(SNu(X)).-> CLov(x))
(2) (Ax)(At)(Tp(t) & xêQ.->. [¬(LKm(l(x,t),X))
&¬(LKm(Neg(l(x,t)),X))])
(3) (As)(At)[Tp(t) & sêQ.->.(As´)(At´)[s´êQ & Tp(t´).->.
LKm(l(s´,t´), Un(X,{l(s,t)})) v LKm(Neg(l(s´,t´)), Un(X,{l(s,t)}))]

Det vil være tilstrekkelig å vise at kravene i Definisjon 8.1.4 er oppfylt. Fra (0) og (1) følger åpenbart (4) (Ax)(xêX.->.CLov(x,w)) Fra dette, (0) og (2) følger at det første og andre kravet i Definisjon 8.1.4 er oppfylt. Det gjenstår derfor bare å vise:

(+) (At)(têT -> (Et')(t'êT & t+a≥t'≥t &CompS(XU{g;w(t,t')})))

Anta derfor for vilkårlig valgt t at (5) têT. Sett t'=d [t]. Vi har da:

(6) g;w(t,t') = SNu/t''ê[t,t']/(l(Hist(w)(t''),t'')) = l(Hist(w)(t),t)

siden t=t' per konstruksjon. Det vil nå være tilstrekkelig å bevise to ting:

(A) Cons(XU{g;w(t,t'))

(B) (As)(At'')(<s,t''>êProd(Q,T).->.
l(s,t'')êk(XU{g;w(t,t')) v Neg(l(s,t''))êk(XU{g;w(t,t')))

Sett (7) s;0=Hist(w)(t). Da har vi (8) wês(l(s;0,t)). Videre har vi i lys av (6) at (9) g;w(t,t')=l(s;0,t). Fra (0), (8) og (9) følger (A). Siden <s;0,t>êProd(Q,T) følger fra (3) at:

(10) (As´)(At´)[s´êQ & Tp(t´).->.
LKm(l(s´,t´), Un(X,{l(s;0,t)})) v LKm(Neg(l(s´,t´)), Un(X,{l(s;0,t)}))

(10) og (9) impliserer imidlertid (B). Dette viser at også påstand (B) holder.

(d) Vi har om DetM(X,w,a) der aêReell & a>0 at DetM(X,w). Dette følger direkte fra de definisjonene vi har gitt. Det følger dermed at påstand (d) i teoremet følger fra det foregående punkt i dette teorem, nemlig (c).

(e) Anta Det(X). Fra Definisjon 8.2.1 følger da at det finnes s;0êQ og t;0êT slik at vi har:

(1) Cons(Un(X,{l(s;0,t;0)})

(2) (As)(At)[sêQ & Tp(t).->.l(s,t)êk(Un(X,{l(s;0,t;0)})) v
Neg(l(s,t))êk(Un(X,{l(s;0,t;0)}))]

Fra (1) følger at det finnes w;0êI der vi har:

(3) w;0ês(SNu(X)) & w;0ês(l(s;0,t;0)). Den siste konjunkten her impliserer at TL(s;0,w;0,t;0) , og derfor at (4) Hist(w;0)(t;0) = s;0. La nå w' være et vilkårlig element i I der vi har : (5) w'ês(SNu(X)) og (6) Hist(w')(t;0) = Hist(w;0)(t;0) = s;0

Anta for reductio ad absurdum at ¬(w'~w;0). da finnes det t;1 der vi har:

(7) Hist(w')(t;1)≠Hist(w;0)(t;1)

Anta Hist(w')(t;1)=s;1 og Hist(w;0)(t;1)=s;2. Da har vi s;1≠s;2 og at

(8) w'ês(l(s;1,t;1) & w;0ês(l(s;2,t;1)

Fra (6) fremgår det at Hist(w')(t;0)=s;0 og derfor at w'ês(l(s;0,t;0)). Dette (3) og (5) impliserer at (9) w',w;0ês(SNu(XU{l(s;0,t;0)})). Vi har <s;1,t;1>êProd(Q,T). Dette og (2) impliserer:

(10) l(s;1,t;1)êk(Un(X,{l(s;0,t;0)})) v Neg(l(s;1,t;1))êk(Un(X,{l(s;0,t;0)}))

Fra (5) og (10) følger w;0,w'ês(l(s;1,t;1)) v w;0,w'ês(Neg(l(s;1,t;1))). I det første tilfelle har vi w;0ês(l(s;1,t;1)) som åpenbart strider mot (8) siden s;1≠s;2. I det andre tilfellet har vi w'ês(Neg(l(s;1,t;1))) som også helt åpenbart er i strid med (8).

(f) Anta SDet(X), ie. anta:

(1) Mng(X)& X Inkl U & Cons(X)

(2) (Ax)(Aw)(xêX&wês(SN(X)).->. CLov(x,w))

(3) (Ax)(At)(Tp(t) & xêQ.->. [¬(LKm(l(x,t),X)) &¬(LKm(Neg(l(x,t)),X))])

(4) (As)(At)[Tp(t) & sêQ.->.(As´)(At´)[s´êQ & Tp(t´).->.
LKm(l(s´,t´), Un(X,{l(s,t)}))
v LKm(Neg(l(s´,t´)), Un(X,{l(s,t)}))]]

Anta videre (5) wês(SNu(X)) & têT for vilkårlige objekter w,t. Det fremgår fra (1) -(5) og Definisjon 8.3.1 at det vil være tilstrekkelig åvise:

(+) (As)(At´)[s´êQ & Tp(t´).->.LKm(l(s,t´), Un(X,{l(s;0,t)}))

v LKm(Neg(l(s,t´)), Un(X,{l(s;0,t)}))]]

der s;0 = (ix)TL(x,w,t). Men siden <s;0,t>êProd(Q,T) følger (+) umiddelbart fra (4).

Dette avslutter vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

§8.6 Om motsigelsesfriheten til den påstand at det finnes strengt deterministiske teorier.

Fra definisjonen ovenfor av strengt deterministisk teori og de aksiomer som inngår i vår teori E;3+[HP1] kan vi ikke utlede eksistensen av strengt deterministiske teorier. Dette gjelder også om vi tar for oss Definisjon 8.1.3 og Definisjon 8.1.4. I teorien E;3+[HP1] kan man ikke bevise (Ew)(EΔ)(wêI & DetM(Δ,w)). Heller ikke kan man bevise noen teoremer av f. eks. typen:

(Aa)(aêReell & a>0.->. (Ew)(EΔ)(DetM(Δ,w,a)).

Dette er forsåvidt vesentlig fordi det viser at på basis av de setninger som vi så langt har nevnt er umulig å bevise at en mulig verden er deterministisk. Dette gjelder også den aktuelle, faktisk realiserte verden. Dette er imidlertid ikke overaskende eller oppsiktsvekkende. De grunnsetninger som inngår i E;3+[HP1] er, hvis vi forutsetter at de er sanne, svært svake. Det skulle faktisk ikke være så vanskelig å se at de er fullt forenelige med den antagelse at det ikke finnes kausallover. Det følger i så fall at vi ikke kan bevise eksistensen av deterministiske teorier i noen av de betydninger som vi har betraktet. For fra f.eks. definisjonen av "Δ er en strengt deterministisk teori" følger det at en slik teori er en ikke-tom mengde med kausallover og finnes strengt deterministiske teorier må det da også finnes kausallover.

Vi skal imidlertid bevise en sats som sier at strengt deterministiske teorier eksisterer under visse forutsetninger. Disse forutsetninger er temmelig sterke – og delvis også noe kuriøse – slik at teoremet tør karakteriseres som forholdsvis svakt og av mer begrenset interesse.

Først gjør vi imidlertid oppmerksom på at vi bruker uttrykket "(dx)(Fx)" for å betegne den funksjonen som til hvert objekt x tilordner verdien F(x). Videre bruker vi uttrykket "(dxêA)(F(x))" for å betegne den funksjonen som til ethvert objekt x i mengden A tilordner objektet F(x). Disse to uttrykk kan formelt defineres på den følgende måte:

(1) (dx)(F(x)) = Mg(<x,F(x)>:x=x)

(2) (dxêA)(F(x)) = Mg(<x,F(x)> : xêA)

I begge disse definisjonene forutsetter vi selvfølgelig at "F(x)" er en term som inneholder "x" som fri variabel.

Satsen som vi vil studere er denne:

TEOREM 8.6.1: *Anta Y: Q-(1-1,på)->Reell og X: T-(1-1,på)->Reell. Anta videre at (f) (fêExp(Q,T).->. G(f)≠ø). Definer u ved:*

u= s;-1[Un(Mg(G((dtêT)(Y`-1(X(t)^2-c))): cêReell))]. Sett Δ={u} og anta videre at: (+) (Aw)(wêI&True(w,u).->.CLov(u,w)). Under disse forutsetninger har man at Δ er en strengt deterministisk teori, mao. SDet(Δ).

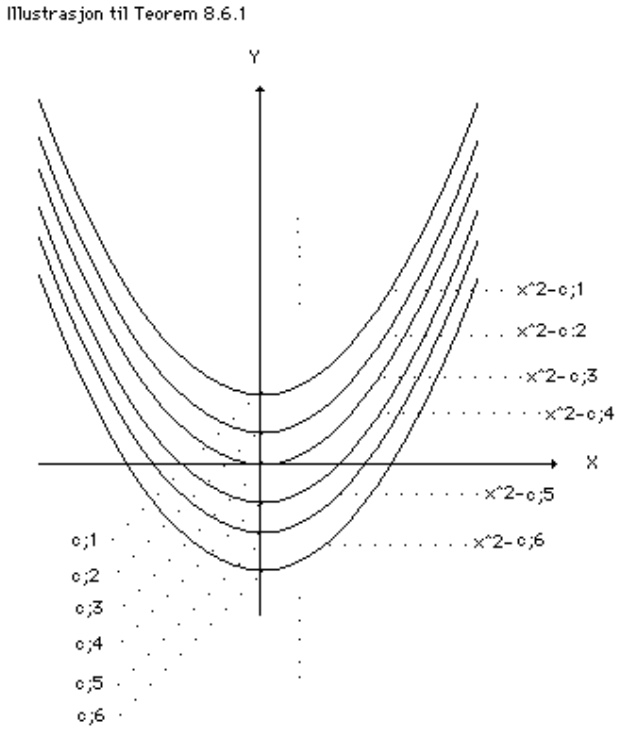
En rekke forklarende kommentarer til denne satsen er på sin plass. La oss først se på de to første forutsetningene i satsen. Disse er :

(1) Y: Q-(1-1,på)->Reell

(2) X: T-(1-1,på)->Reell

Den første av disse forutsetningene sier at Y er en en-entydig avbildning av klassen av alle logisk mulige totaltilstander, Q, på klassen av de reelle tall, Reell. Den andre forutsetningen

sier at X er en tilsvarende en-entydig avbildning av klassen av tidspunkter på klassen av de reelle tall. En første bemerkning som kan gjøres i denne forbindelse er at om E;3+[HP1] er en konsistent teori får man fremdeles en konsistent teori som resultat om man legger til som et nytt aksiom at det finnes to funksjoner som oppfyller kravene (1) og (2).



Fra (1) og (2) følger imidlertid at hvis fêExp(Reell,Reell), dvs. hvis f er en funksjon som til ethvert reellt tall tilordner et reelt tall, så er funksjonen definert ved: (3) f*= dtêT(Y;-1(f(X(t)))[6] en funksjon som er med i Exp(Q,T). Man kan altså oppfatte * som en operasjon som til hver funksjon i Exp(Reell,Reell) tilordner en-entydig en funksjon i Exp(Q,T). Man kan også vise at denne avbildningen * er på Exp(Q,T) om (1) og (2) holder. Den andre forutsetningen i teoremet er (4) (f)(fêExp(Q,T).->. G(f)≠ø). Nå er G, slik vi har definert den i §4 åpenbart en en-entydig funksjon når vi begrenser domenet til Exp(Q,T). Videre er det slik at enhver verden w er med i G(f) for en eller annen funksjon fêExp(Q,T). Dette innebærer hvis f er en funksjon i Exp(Reell,Reell) vil G(f*) være en entydig bestemt mengde av mulige verdener som svarer til f. Omvendt vil vi ha om w er en mulig verden at det finnes en entydig bestemt funksjon f som er med i Exp(Reell,Reell) slik at wêG(f*). Studerer man figuren på neste side vil det altså til enhver av funksjonene (dxêReell)(x^2-c) hvor c er et reelt tall svare en helt bestemt klasse av mulige verdener hvis vi tenker oss at punktene på X-aksen representerer klassen av tidspunkter og punktene på Y-aksen representerer klassen av alle mulige totaltilstander.[7] I lys av definisjonen av * ovenfor ser man at f*((dxêReell)(x^2-c)) = (dtêT)(Y`-1(X(t)^2-c)). Vi har derfor at G((dtêT)(Y`-1(X(t)^2-c))), ettersom c gjennomløper de reelle tall, er en familie med mengder av mulige verdner. Unionen av disse mengder, mao.:

Un(Mg(G((dtêT)(Y`-1(X(t)^2-c))): cêReell))

---

6 Merk her at "Y;-1" betegner omvendingen til funksjonen Y.

7 Dette er selvfølgelig under de forutsetninger som er nevnt i satsen dvs. (1),(2) og (4) holder.

representerer sannhetsmengden til et visst utsagn u. Den siste forutsetningen i teoremet sier da som man ser at i alle de verdener hvor dette utsagnet er sant er det også en kausallov.

La oss nå kalle den eksistensielle lukning av konjunksjonen av (1) og (2) samt den følgende setning:

(Au)(u= s;-1[Un(Mg(G((dtêT)(Y`-1(X(t)^2-c))): cêReell))] –>
(Aw)(wêI&True(w,u).->.CLov(u,w))

for K. Det man da kan vise, men som vi ikke vil vise her, er at hvis man legger til K og (Af)(fêExp(Q,T) –> G(f)≠ø) som nye ikke-logiske aksiomer til teorien E;3+[HP1] får man en ny teori som resultat som er konsistent relativt til E;3+[HP1]. Siden teoremet ovenfor viser at vi allerede i den sistnevnte teori kan utlede (EΔ)SDet(Δ), gitt K og (Af)(fêExp(Q,T) –> G(f)≠ø) , innebærer dette at vi uten fare for motsigelser kan legge til den påstand at deterministiske teorier eksisterer som et nytt ikke-logisk aksiom til E;3+[HP1]. Det er i dette perspektiv at teoremet ovenfor har en viss interesse.

Bevis: La oss først bemerke at vi har (X(t)^2-c)êReell for alle têT. Dette har vi i kraft av den andre forutsetningen i teoremet. Siden Y: Q-(1-1,på)->Reell har vi dessuten Y;-1(X(t)^2-c)êQ. Det følger derfor at (dtêT)(Y;-1(X(t)^2-c))êExp(Q,T).
Det skulle være klart fra definisjonen av Δ at denne mengden oppfyller de to første kravene i definisjonen av strengt deterministisk teori.

(i) For å vise at {u} er en deterministisk teori, må vi først vise at {u} er konsistent. Vi gjør dette slik: Fikser cêReell. Da har vi som vist at (dtêT)(Y;-1(X(t)^2-c))êExp(Q,T). Fra dette og den tredje forutsetningen i satsen følger: G((dtêT)(Y;-1(X(t)^2-c)))≠ø. Men da følger det fra definisjonen av u at: ø≠G((dtêT)(Y;-1(X(t)^2-c))) Inkl
(Un(Mg(G((dtêT)(Y;-1(X(t)^2-c))): cêReell))) Inkl s(u)
Dette impliserer at (Ew)(wêI & wêSNu(Δ)) ie. Cons(Δ).

(ii) Siden vi har (Ax)(Aw)(CLov(x,w).->.True(w,x)) følger i lys av forutsetningen (+) at hvis wêSNu(Δ) så har vi True(w,u). Videre har vi om xêΔ at x=u og derfor True(w,x). Dette og (+) gir oss CLov(x,w). Vi har derfor bevist:

(Ax)(Aw)(xêΔ & wêSNu(Δ).->. CLov(x,w))

(iii) Vi må også vise at det femte kravet i definisjonen av strengt deterministisk teori holder. Anta <s,t>êProd(Q,T) for vilkårlige s,t. Vi skal vise to ting : (a) Det finnes en verden w der l(s,t) er sant og hvor vi dessuten har wês(SNu(Δ)). (b) Det finnes wêI slik at wês(Neg(l(s,t))) & wês(SNu(Δ))

Vi tar først for oss punkt (a). Sett y;0=Y(s) og x;0=X(t). Sett c;0=x;0^2-y;0. Da har vi tydligvis at c;0 er entydig bestemt og at y;0=x;0^2-c;0. Vi betrakter så h;0=(dxêT)(Y;-1(X(x)^2-c;0)). Da har vi G(h;0)≠ø. La wêG(h;0). Da følger True(w,u) siden sannhetsmengden til u inkluderer G(h;0). Videre har vi:
h;0(t)=Y;-1(X(t)^2-c;0)=Y;-1(x;0^2-c;0)=Y;-1(y;0)=Y;-1(Y(s)) = s. Dette følger siden vi har at Y er en avbildning som er en-entydig og på Reell. Det følger at
h;0(t)=s og siden wêG(h;0) kan vi slutte at utsagnet l(s,t) er sant i w.

Vi tar dernest for oss punkt (b). Vi setter som ovenfor y;0=Y(s) og x;0=X(t). Sett c;0=x;0^2-y;0. Det vil selvfølgelig finnes c;1êReell der c;1≠c;0. Definer nå h;1 ved h;1=(dxêT)(Y;-1(X(x)^2-c;1)). Da har vi h;1êExp(Q,T). Men nå har vi

h;1=Y;-1(X(t)^2-c;1) = Y;-1(x;0^2-c;1)≠Y;-1(x;0^2-c;0)
=Y;-1(y;0)=Y;-1(Y(s)) =s.

Dette innebærer at hvis wêG(h;1) så har vi wês(Neg(l(s,t))). På den annen side har vi wêG(h;1) Inkl Un(Mg(G((dtêT)(Y;-1(X(t)^2-c))): cêReell)) Inkl s(u). Da har vi åpenbart wês(SNu(Δ)). Vi har altså vist at

wês(Neg(l(s,t)))& wês(SNu(Δ)).

Fra dette følger det vi ønsker, nemlig ¬(LKm(l(s,t),Δ). Dette viser at også det femte kravet i definisjonen er oppfylt.

(iv) Endelig må vi også vise at det sjette kravet i vår definisjon av strengt deterministisk teori er tilfredsstilt. Anta derfor (1) <s,t>êProd(Q,T) for vilkårlige entiteter s,t. Vi må vise:

(+) (As')(At')(s'êQ &t'êT.->.
LKm(l(s',t'),ΔU{l(s,t)})v LKm(Neg(l(s',t')),ΔU{l(s,t)})

Vi setter (0) y;0=Y(s) og x;0=X(t). Videre setter vi c;0=x;0^2-y;0 og har da selvfølgelig at y;0=x;0^2-c;0. Definer tilslutt h;0 ved (1) h;0=(dxêT)(Y;-1(X(x)^2-c;0)).

I første omgang skal vi nå godtgjøre den følgende påstand:

(‡) G(h;0) = s(SNu(ΔU{l(s,t)}))

(a) Anta for vilkårlig w at wêG(h;0). Da har vi h;0=Hist(w) Det følger fra (0) og (1) at h;0(t)=Y;-1(X(t)^2-c;0)=Y;-1(x;0^2-c;0)=Y;-1(y;0)=Y;-1(Y(s)) =s. Derfor må vi ha wês(l(s,t)). Men vi har også, slik vi har vist ovenfor at wês(SNu(Δ)). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (‡) holder.

(b) Anta (1) wês(SNu(ΔU{l(s,t)})). Da har vi:
(2) wê Un(Mg(G((dtêT)(Y;-1(X(t)^2-c))): cêReell)). Det følger i så fall at det må finnes et tall c;1êReell der (3) wê G((dtêT)(Y;-1(X(t)^2-c;1))). På den annen side har vi (4) wês(l(s,t)). La g være historien til w,ie. Hist(w)=g. Da kan vi slutte, i lys av (4), at det følgende må være tilfelle: (5) g(t)=s. Vi er også berettiget i å slutte

(6) g=(dtêT)(Y;-1(X(t)^2-c;1))

Dette følger fra det at Hist(w)=g, og derfor wêG(g), samt (3). Fra (5) og (6) har vi: s=Y;-1(X(t)^2-c;1)=Y;-1(x;0^2-c;1) Videre har vi per definisjon y;0=Y(s) og derfor s=Y;-1(y;0)=Y;-1(X;0^2-c;0). Men siden Y er en-entydig og på følger da at x;0^2-c;0 = x;0^2-c;1. Da følger c;0=c;1. Men fra dette (6) og definisjonen av h;0 følger g=h;0. Men da har vi wêG(h,0), som er det vi ønsker. Dette viser at (‡) holder.

Anta nå at s'êQ og t'êT. Det er da to muligheter: (i) h;0(t')=s'. Anta w'êG(h;0). Da har vi w'ês(l(s',t')). Dette innebærer at G(h,0) Inkl s(l(s',t')) og derfor i lys av (‡), at (+) holder i dette tilfellet. (ii) h;0(t')≠s'. Anta for vilkårlig w' at w'êG(h;0). Da har vi TL(h;0(t'),w',t') og derfor ¬TL(s',w',t'). Da w'ês(Neg(l(s',t')). Vi har altså i dette tilfellet G(h;0) Inkl s(Neg(l(s',t'))). Sammen med (‡) impliserer dette at (+) også holder i dette tilfellet.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **Q.E.D.**

§9 Deterministiske teorier og muligheten av verdensforløp som forgrener seg.

Deterministiske teorier kan sies å tvinge verdensforløpet inn i en bestemt retning slik at det ikke blir mulig å tenke seg at det forgrener seg. Tilsvarende vil slike teorier under visse omstendigheter forhindre at verdener smelter sammen ved et gitt tidspunkt. Formålet med denne paragrafen er å presisere nærmere hva som i denne forbindelse kan forstås ved "forgrening" og "sammen-smeltning" og bevise enkelte satser som kan kaste lys over på hvilken måte en deterministisk teori tvinger hendelsesforløpet til å bli lineært. Det bør bemerkes at de resultater vi fremlegger her er mer fragmentariske og at vi innskrenker oss til å betrakte deterministiske teorier av den typen som ble definert i §8.1.

Hvis to verdener er historisk sett identiske opp til og inkludert tidspunktet t, men er slik at de ikke ved noe tidspunkt senere befinner seg i den samme totaltilstand, eller i det minste avviker i så henseende ved et senere tidspunkt, skal vi si at de to verdenene har et mulig forgreningspunkt ved tidspunktet t. Vi bruker "Forg(w;1,w;2,t)" som forkortelse for det lengere uttrykket "verdnene w;1 og w;2 har et mulig forgreningspunkt ved tidspunktet t". Vi gir den følgende formelle definisjon:

DEFINISJON 9.1: Forg(w;1,w;2,t) <-> [w;1,w;2êI &
(At')(t'≤t.->. Hist(w;1)(t')= Hist(w;2)(t')) &
(Et")(t">t & Hist(w;1)(t") ≠ Hist(w;2)(t"))]

Dette er imidlertid ikke det eneste forgreningsbegrep man kan arbeide med. Man kunne også tenke seg å si at to verdener forgrener seg ved tidspunktet t hvis og bare hvis de er tilstandslike opp til og inkludert tidspunktet t og for hvert tidspunkt etter t befinner seg i forskjellige totaltilstander. Vi skal bruke "Forg;2" for å betegne dette forgreningsbegrep og gir den følgende dfinisjon av det:

DEFINISJON 9.2: Forg;2(w;1,w;2,t) <-> [w;1,w;2êI &
(At')(t'≤t.->. Hist(w;1)(t') = Hist(w;2)(t')) &
(At")(t">t -> Hist(w;1)(t") ≠ Hist(w;2)(t"))]

Det forgreningsbegrepet som er innført ved Definisjon 2 er sterkere enn det som er innført ved Definisjon 9.1. Man ser lett, siden (Et")(t">t &t"êT) at man har :

Forg;2(w;1,w;2,t) -> Forg(w;1,w;2,t)

En tredje definisjon av forgrening er også mulig:

DEFINISJON 9.3: Forg;3(w;1,w;2,t) <-> [w;1,w;2êI &
(At')(t'≤t.->. Hist(w;1)(t') = Hist(w;2)(t')) &
Mg(Hist(w;1)(t'): t'>t)Ω Mg(Hist(w;2)(t'): t'>t) =ø]

Som man ser innebærer Forg;3(w;1,w;2,t) at verdnene w;1 og w;2 befinner seg i den samme totaltilstand opp til og inkludert tidspunktet t, men etter dette tidspunktet vil ingen av de totaltilstandene som foreligger realisert i verdenen w;1 være blandt noen av de totaltilstandene som foreligger realisert i w;2 etter t. Med andre ord har mengden Mg(Hist(w;1)(t'): t'>t) ikke noe element felles med mengden Mg(Hist(w;2)(t'): t'>t). Man ser at dette tredje forgreningsbegrepet er sterkere enn de to andre. Har vi Forg;3(w;1,w;2,t) impliserer dette at Forg;2(w;1,w;2,t) og Forg(w;1,w;2,t)

Før vi nå går videre skal vi gi et bevis for den følgende hjelpesetning som vi benytter i beviset for satsene som følger. Det dreier seg om den følgende setning:

LEMMA 9.1: *Anta w;1,w;2êI & t,t'êT. Anta videre:*
(At')(t'≥t -> Hist(w;1)(t') = Hist(w;2)(t'))
Da gjelder: g;(w;1)(t,t') = g;(w;2)(t,t').

Bevis: Anta wêg;(w;1)(t,t') for vilkårlig w. da har vi i lys av definisjonen av g;(w;1) at wês(SNu/t;1ê[t,t']/(l(Hist(w;1)(t;1),t;1))). Dette innebærer:

(At;1)(t≤ t;1 ≤t' -> wês(l(Hist(w;1)(t;1),t;1))) Fra dette og den andre forutsetningen i teoremet følger:

(At;1)(t≤ t;1 ≤t' -> wês(l(Hist(w;2)(t;1),t;1))). Herav følger så: wês(SNu/t;1ê[t,t']/(l(Hist(w;1)(t;1),t;1))) = g;(w;1)(t,t'). Dette viser at inklusjonen mot høyre i konsekventen i teoremet holder. Inklusjonen mot venstre vises på en helt analog måte. **Q.E.D.**

Det er en egenskap ved deterministiske teorier at de på forskjellig vis tvinger verdensforløpet til ikke å forgrene seg. Vi skal studere enkelte satser om dette. I første omgang skal vi først studere den følgende sats:

TEOREM 9.1: *Anta wêI og at*

(Ax)(Aw;1)(Aw;2)(w;1,w;2êI &CLov(x,w;1)& w;1 ~ w;2.-> CLov(x,w;2)
Anta videre at DetM(Δ,w). Da gjelder det følgende:
(Et;0)(t;0êT &(At)(t≥t;0.->. ¬(Ew;1)(Forg(w;1,w,t)& (Ax)(xêΔ -> True(w;1,x))))

Bevis: Anta hypotesene i teoremet holder. Da følger i lys av et Teorem 8.1.2 at:
(1) (Et')(t'≥t & s(SNu(ΔU{g;w(t,t'})=G(f)) hvor (2) f=Hist(w). Fra (1) følger selvfølgelig eksistensen av t' slik at (3) t'≥t & s(SNu(ΔU{g;w(t,t'})=G(f)
Det fremgår fra dette at det vil være tilstrekkelig å bevise:
(4) (At;1)(t;1≥t'.->. ¬(Ew;1)(Forg(w;1,w,t;1)& (Ax)(xêΔ -> True(w;1,x)))
Anta derfor for reduktio ad absurdum at:
(5) t;1≥t' & Forg(w;1,w,t;1)& (Ax)(xêΔ -> True(w;1,x))
for noe t;1 ≥t' og w;1êI. Fra (5) og definisjonen av Forg følger:
(6) w;1êI
(7) (At;2)(t;2≤t;1 -> Hist(w;1)(t;2) = Hist(w)(t;2))
(8) (Et;3)(t;1<t;3 & Hist(w;1)(t;3) ≠ Hist(w)(t;3))
Fra (8) følger åpenbart eksistensen av t;3 der
(9) t;3 > t;1 & Hist(w;1)(t;3) ≠ Hist(w)(t;3)
Sett (10) a= Hist(w;1)(t;3) & b = Hist(w)(t;3) . Da har vi:
(11) l (a,t;3)êU w;1ês(l(a,t;3)) & a≠b.
Fra (3) og (2) følger: (12) wês(SNu(ΔU{g;w(t,t'})). Siden t;1 ≥t' har vi i lys av (7): w;1 ês(g;w(t,t')) (Man bør i denne forbindelse konsultere Lemma 9.1.) Fra (5) følger imidlertid at w;1ês(SNu(Δ)). Da har vi: (13) w;1ê s(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Siden DetM(Δ,w) har vi ved hjelp av definisjonen av "DetM" at (14) CompS(ΔU{g;w(t,t')}). Dette innebærer at for alle sêQ og têT har vi:
l(s,t)êk(ΔU{g;(t,t')}) v Neg(l(s,t))êk(ΔU{g;(t,t')}) Det følger ved hjelp av dette at vi må ha:
(15) l(a,t;3)êk(ΔU{g;(t,t')}) v Neg(l(a,t;3))êk(ΔU{g;(t,t')})
Anta nå mot formodning at: Neg(l(a,t;3))êk(ΔU{g;(t,t')}). Da må vi ha at:
s(SNu(ΔU{g;(t,t')})) Inkl s(Neg(l(a,t;3))). Siden (13) holder har vi i så fall at w;1ês(Neg(l(a,t;3))). Dette strider imidlertid mot (10). Det følger at:
(16) l(a,t;3)êk(ΔU{g;(t,t')}). Tilsvarende har vi i lys av (14) at
l(b,t;3)êk(ΔU{g;(t,t')}) v Neg(l(b,t;3))êk(ΔU{g;(t,t')}) Nå har vi i lys av (1) og (2) at : (17) wês(SNu(ΔU{g;(t,t')})). Anta Neg(l(b,t;3))êk(ΔU{g;(t,t')}). Da følger:
s(SNu(ΔU{g;(t,t')})) Inkl s(Neg(l(b,t;3))) . I lys av (17) impliserer dette at wês(Neg(l(b,t;3))) som er umulig siden vi har fra (10) at b = Hist(w);(t;3). Fra dette ser man at vi kan konkludere med: (18) l(b,t;3)êk(ΔU{g;(t,t')}). Siden a≠b følger at s(l(a,t;3))Ωs(l(b,t;3)=ø. Fra dette, (16) og (18) følger at k(ΔU{g;(t,t')}) er inkonsistent. Dette er klart umulig. Det følger at det ikke kan finnes t;1 ≥t' og w;1êI slik at (5) holder. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

I forbindelse med Teorem 9.1 bemerkes det at satsen holder om man i stedet for "Forg(w;1,w;2,t)" setter inn "Forg;2(w;1,w;2,t)" eller "Forg;3(w;1,w;2,t)". Videre holder satsen om man istedet for betingelsen "DetM(Δ,w)" bruker en av betingelsene "DetM(Δ,w,a)" eller "SDet(Δ) & wêSNu(Δ)" siden begge disse er sterkere.

Analogt med at to mulige verdener kan forgrene seg ved et tidspunkt t er det også mulig at to verdener kan "smelte sammen" ved et tidspunkt t. Vi skal studere noen mulige definisjoner av denne ideen om "sammensmeltning". Et første forslag ville være å si at to mulige verdener w;1 og w;2 smelter sammen ved tidspunktet t i svak forstand hvis og bare hvis vi har at de historisk sett er identiske etter og ved tidspunktet t og at det ellers er slik at de divergerer ved et eller annet tidspunkt som kommer før t. Vi bruker "Merge(w;1,w;2,t)" som

forkortelse for "w;1 og w;2 smelter sammen ved tidspunktet t i svak forstand" og gir den følgende formelle definisjon av dette uttrykk:

DEFINISJON 9.4: Merge(w;1,w;2,t) <-> [w;1,w;2êI &
(At')(t'≥t -> Hist(w;1)(t') =Hist(w;2)(t')) &
(Et")(t"<t & Hist(w;1)(t") ≠ Hist(w;2)(t"))]

Også i denne forbindelse er det mulig å innføre "sterkere" begreper. Man kunne istedet for Definisjon 1 foreslå å si at to verdener faller sammen ved tidspunktet t om de ved dette tidspunkt og ethvert senere tidspunkt befinner seg i den samme totaltilstand og det dessuten er slik for ethvert tidspunkt som kommer før t at de to verdenene befinner seg i forskjellig totaltilstand. Vi bruker "MergeS(w;1,w;2,t)" som forkortelse for uttrykket "Verdenene w;1 og w;2 faller sammen ved tidspunktet t i streng forstand". Denne uttrykksmåten definerer vi formelt ved:

DEFINISJON 9.5: MergeS(w;1,w;2,t) <-> [w;1,w;2êI &
(At')(t'≥t -> Hist(w;1)(t') =Hist(w;2)(t'))&
(At")(t"<t .->. Hist(w;1)(t") ≠ Hist(w;2)(t"))]

Men også andre definisjoner av uttrykket "falle sammen" er mulige her. Man kunne kanskje tenke seg å definere en enda sterkere relasjon "Merge;2" ved:

DEFINISJON 9.6: Merge;2(w;1,w;2,t) <-> [w;1,w;2êI &
(At')(t'≥t -> Hist(w;1)(t') =Hist(w;2)(t'))&
Mg(Hist(w;1)(t"): t"<t)ΩMg(Hist(w;2)(t"): t"<t)=ø]

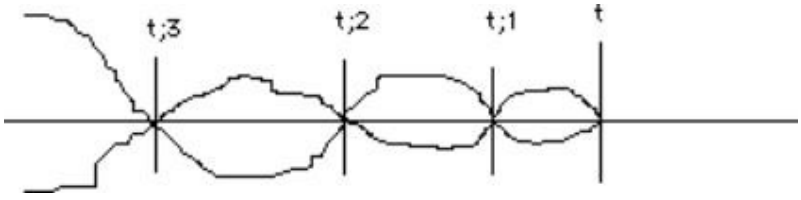
Denne relasjonen er mindre inklusiv enn den som ble definert ved Definisjon 5 fordi den siste klausulen i Definisjon 9.5 har blitt erstattet med med det sterkere kravet: Mg(Hist(w;1)(t"): t"<t)ΩMg(Hist(w;2)(t"): t"<t)=ø. Vi nevner også en siste mulighet i denne forbindelse:

DEFINISJON 9.7: Merge;3(w;1,w;2,t) <-> [w;1,w;2êI &
(At')(t'≥t -> Hist(w;1)(t') =Hist(w;2)(t'))&
(At;2)(t;2<t -> (Et')(t;2<t'<t & Hist(w;1)(t')≠Hist(w;2)(t')))]

Denne definisjonen er svakere enn Definisjon 9.5, men sterkere enn Defini-sjon 9.4. Vi har derfor at den følgende sats, som er av en mer triviell natur holder:

TEOREM 9.2: *Er w;1,w;2êI og têT gjelder følgende:*
Merge;2(w;1,w;2,t) -> MergeS(w;1,w;2,t)
-> Merge;3(w;1,w;2,t) -> Merge(w;1,w;2,t)

Den følgende figur er ment å være en illustrasjon til Definisjon 9.7:



På samme måte som vi ovenfor viste at hvis Δ er en deterministisk teori i w så vil det finnes et tidspunkt t;0 som er slik at det ikke vil finnes verdener som forgrener seg fra w ved noe

tidspunkt etter t;0 dersom utsagnene i Δ er sanne i w, kan vi nå vise noe tilsvarende for sammensmeltning. Dette er på et vis ikke spesielt overraskende siden sammensmeltning av to verdener kan oppfattes som en slags forgrening om vi ser tiden retrospektivt. Den sats vi nå har i tankene er denne:

TEOREM 9.3: *Anta wêI & DetM(Δ,w). Da gjelder den følgende påstand:*
(At)(têT -> ¬(Ew;1)(w;1êI & (Ax)(xêΔ -> w;1ês(SNu(Δ)) & Merge(w;1,w,t)))

Denne satsen holder likefullt om vi i stedet for "Merge" skriver "MergeS", "Merge;2" eller "Merge;3". Vi gir det følgende detaljerte bevis:

Bevis: Anta (1) wêI & DetM(Δ,w). Anta dessuten for vilkårlig t at (2) têT. Anta i tillegg for reduktio adbsurdum at det finnes en w;1 der vi har:

(3.1) w;1êI & (Ax)(xêΔ -> w;1ês(x)

(3.2) Merge(w;1,w,t)

Fra definisjonen av DetM(Δ,w) følger:

(4) (At)(têT -> (Et')(t'êT & t'≥t & CompS(ΔU{g;w(t,t')}))) Fra dette og (2) følger åpenbart eksistensen av et tidspunkt t' der vi har:

(4.1) t'≥t & CompS(ΔU{g;w(t,t')}) Fra (3.2) og definisjonen av Merge-relasjonen følger: (6) (At;2)(t;2≥t -> Hist(w;1)(t;2)= Hist(w)(t;2)) og dessuten:

(7) (Et,3)(t;3<t & Hist(w;1)(t;3) ≠ Hist(w)(t;3)) Siden t'≥t følger i lys av (6) og den hjelpesetningen vi har vist overfor at (8) g;(w;1)(t,t') = g;w(t,t')

Fra (3.1) følger at (9) w;1ês(SNu(Δ)). Fra (8) følger w;1ês(g;w(t,t')) Vi har derfor at (10) w;1ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')}). Fra (7) følger at det finnes t;3 der:

(11) t;3<t & Hist(w;1)(t;3) ≠ Hist(w)(t;3).

Sett nå per definisjon: (12) a= Hist(w;1)(t;3) & b= Hist(w)(t;3). Fra (4.1) og definisjonen av CompS følger:

(13) (As)(At)(sêQ & têT ->
(l(s,t)êk(ΔU{g;w(t,t')}) v Neg(l(s,t))êk(ΔU{g;w(t,t')})))

Fra (12) følger w;1ês(l(a,t;3). I lys av (10) har vi da ¬(Neg(l(a,t;3))êk(ΔU{g;w(t,t')})). Siden aêQ og t;3êT følger det ved hjelp av (13), og dette at:

(14) l(a,t;3)êk(ΔU{g;w(t,t')}).

På tilsvarende måte ser man at vi i lys av (12) må ha wês(l(b,t;3)). Videre har vi i lys av definisjonen av DetM og det forhold at (Ax)(Aw)(CLov(x,w) -> wês(x)), samt det forhold at wês(g;w(t,t')) at wês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Fra disse forhold følger: ¬(Neg(l(b,t;3)êk(ΔU{g;w(t,t')})). Siden bêQ og t;3êT følger fra dette og (13) at (15) l(b,t;3)êk(ΔU{g;w(t,t')}). Siden wês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})) har vi ved hjelp av (14) og (15) at (16) wês(l(a,t;3)) & wês(l(b,t;3)). Fra (16) og definisjonen av funksjonen l følger TL(b,w,t;3) & TL(a,w,t;3). Men dette og det forhold at a≠b og a,bêQ strider mot aksiom (TL2). Antagelsen om at det skulle finnes en w;1 der (3.1) og (3.2) holder leder derfor til en motsigelse. Det kan derfor ikke finnes noen slik w;1. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Igjen bemerker vi at man i teoremet ovenfor kan erstatte "DetM(Δ,w)" med en av de sterkere betingelsene "DetM(Δ,w,a)" eller "SDet(Δ) &wêSNu(Δ)" uten at teoremet derfor opphører med å bli bevisbart.

§10 Et teorem om strengt deterministiske teorier.

TEOREM 10.1 *Anta X er en strengt deterministisk teori. Mao. anta at SDet(X). Anta videre at (Ax)(xêX.->.True(w,x)). Dette innebærer at alle kausallovene som inngår i X er sanne i verdenen w. Anta videre at den følgende påstand gjelder:*

(°) (Ax)(Aw)(Aw')(CLov(x,w) & w~w'.->.CLov(x,w'))

(°) uttrykker at dersom en kausallov gjelder i en viss verden vil den også gjelde i enhver verden som historisk sett er identisk. Anta videre t er et vilkårlig tidspunkt ie. têT og at s er den totaltilstand som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w, mao. at vi har : TL(s,w,t). Da har vi at det følgende gjelder :

(+) s(SN(Un(X,{l(s,t)}))) = Mg(w' : w' ~w)

Dette innebærer altså at sannhetsmengden til snittet av alle utsagnene i teorien X utvidet med utsagnet l(s,t) er identisk med mengden av alle de verdener som er historisk sett identiske med w.

Bevis: Anta (1) SDet(X) og (2) (Ax)(xêX.->.True(w,x)). Fra det første og den definisjonen vi tidligere har gitt av "SDet(X)" følger:

(3) (a) Mng(X)
(b) X Inkl U
(c) Cons(X)
(d) (Ax)(Aw)(xêX&wês(SN(X)).->. CLov(x,w))
(e) (Ax)(At)(Tp(t) & xêQ.->. [¬(LKm(l(x,t),X))
&¬(LKm(Neg(l(x,t)),X))])
(f) (As)(At)[Tp(t) & sêQ.->.(As´)(At´)[s´êQ & Tp(t´).->.
LKm(l(s´,t´), Un(X,{l(s,t)}))
v LKm(Neg(l(s´,t´)), Un(X,{l(s,t)}))]]

Den forutsetningene i teoremet har vi (4) TL(s,w,t). Dette impliserer at
(5) sêQ & têT. Fra dette og punkt (f) i (3) følger:

(6) (As´)(At´)[s´êQ & Tp(t´).->.LKm(l(s´,t´), Un(X,{l(s.t)}))
v LKm(Neg(l(s´,t´)), Un(X,{l(s.t)}))]

Vi må nå vise at (+) i Teorem 10.1 holder.

(i) Vi forsøker først å vise at inklusjonen mot høyre i (+) holder.

Anta derfor for vilkårlig w' at (7) w'ê s(SN(Un(X,{l(s,t)}))). Det vil være tilstrekkelig å vise at w' er historisk sett identisk med w, mao. at (8) w'~w. For å bevise (8) vil det i sin tur være tilstrekkelig å bevise at det følgende holder:

(9) (At')(As')(TL(s',w',t') <-> TL(s',w,t'))

(I) Anta nå i tillegg til (7) at (*) TL(s',w',t') for å bevise halvdelen mot høyre i (9). Da har vi selvfølgelig at s'êQ og t'êT. Fra dette og (6) følger:

(10) LKm(l(s',t'), Un(X,{l(s,t)})) v LKm(Neg(l(s',t')), Un(X,{l(s,t)}))

Fra (4) og (2) følger nå (11) wê s(SN(Un(X,{l(s,t)}))) Anta nå mot formodning at den høyre disjunkten i (10) holder:

LKm(Neg(l(s',t')), Un(X,{l(s,t)}))

I det man erindrer vår definisjon av hva som menes med at et utsagn er en logisk konsekvens av utsagnene i en mengde ser man at dette er ekvivalent med:

(12) s(SN(Un(X,{l(s,t)}))) Inkl s(Neg(l(s',t')))

Fra (7) og (12) følger : w'ê s(Neg(l(s',t')). Dette innebærer imidlertid at ¬(TL(s',w',t')) som strider mot vår antagelse (*). Det følger at disjunkten til venstre i (10) holder og at vi derfor må ha:

LKm(l(s',t'), Un(X,{l(s.t)}))

mao. at (13) s(SN(Un(X,{l(s,t)}))) Inkl s(l(s',t')) . Fra dette og (11) følger wês(l(s',t')) som i sin tur innebærer at TL(s',w,t'). Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (9) holder. Vi må imidlertid også vise at kondisjonalen mot venstre i (9) holder.

(II) Anta (14) TL(s',w,t'). Da har vi selvfølgelig at s'êQ og t'êT. Fra dette og (6) følger:
(15) LKm(l(s',t'), Un(X,{l(s.t)})) v LKm(Neg(l(s',t')), Un(X,{l(s,t)}))
Fra (4) og (2) følger nå (16) wê s(SN(Un(X,{l(s,t)}))) Anta nå mot formodning at den høyre disjunkten i (15) holder:

LKm(Neg(l(s',t')), Un(X,{l(s,t)}))

I det man erindrer vår definisjon av hva som menes med at et utsagn er en logisk konsekvens av utsagnene i en mengde ser man at dette er ekvivalent med:

(17) s(SN(Un(X,{l(s,t)}))) Inkl s(Neg(l(s',t')))

Fra (16) og (17) følger : wê s(Neg(l(s',t')). Dette innebærer imidlertid at ¬(TL(s',w,t')) som strider mot vår antagelse (14). Det følger at disjunkten til venstre i (15) holder og at vi derfor må ha:

LKm(l(s',t'), Un(X,{l(s.t)}))

mao. at (18) s(SN(Un(X,{l(s,t)}))) Inkl s(l(s',t')) . Fra dette og (7) følger w'ês(l(s',t')) som i sin tur innebærer at TL(s',w',t'). Dette viser at kondisjonalen mot venstre i (9) holder. Dermed har vi bevist at kondisjonalen holder begge veier i (9). Dette avslutter vårt bevis for at inklusjonen mot høyre i (+) holder.

(ii) Det gjenstår å vise inklusjonen mot venstre i (+). Anta derfor for vilkårlig w' at w'êMg(w' : w'~w). Det følger at w'~w. Fra hypotesene i teoremet har vi (Ax)(xêX.->. True(w,x)). Videre har vi TL(s,w,t). Fra disse to forhold følger: (Ax)(xêX.v. x=l(s,t):->True(w,x)). Dette innebærer at vi har:
(19) wês(SNu(Un(X,{l(s,t)}))). Vi må imidlertid også vise at dette holder for w'. Anta for vilkårlig x at xêX. Siden SDet(X) og wês(SN(X)) følger da CLov(x,w). I denne forbindelse kan man konsultere (3d) ovenfor. Men siden w'~w følger da CLov(x,w'). Dette innebærer i sin tur at True(w',x). Vi har derfor:

(20) (Ax)(xêX.->,True(w',x).

Siden w'~w og TL(s,w,t) følger også TL(s,w',t). Derfor w'ês(l(x,t)). Dette og (20) impliserer w'ês(SN(Un(x,{l(x,t)}))) som er det vi ønsker. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 10.1. **Q.E.D.**

§11 Prinsippet om at alt har en årsak og spørsmålet om determinisme.

Ovenfor, i forrige paragraf og tidligere paragrafer, har vi beskjeftiget oss med determinisme-begrepet og foreslått forskjellige mulige definisjoner av hva det vil si at hendelsesforløpet i en verden er fullstendig determinert, og hva det innebærer at en teori kan karakteriseres som deterministisk.

Ofte settes imidlertid spørsmålet om determinisme i sammenheng med prinsippet om at enhver hendelse har en årsak. I denne forbindelse er det derfor nærliggende å stille de følgende to spørsmål: (a) Er det slik at man fra prinsippet om at enhver hendelse har en årsak gjelder i en verden w, logisk sett kan slutte at hendelsesforløpet i denne verden w er fullstendig determinert ? (b) Er det slik at man fra det forhold at hendelsesforløpet i en viss mulig verden logisk sett er determinert kan slutte at prinsippet om at enhver hendelse har en årsak gjelder i denne verden ?

Umiddelbart er det ikke opplagt at svaret på disse to spørsmålene er bekreftende. Spørsmålene synes også såpass viktige at en forholdsvis inngående drøftelse av dem kan synes berettiget. Vi skal forsøke å gjøre dette. Nå vil imidlertid svaret på spørsmålene til en viss grad avhenge av hva man mener med at en hendelse h er årsak til en annen hendelse h'. Det må innrømmes at det synes vanskelig å gi noen dekkende definisjon av denne relasjon innenfor rammen av L;+(E;3). I stedet for å arbeide med relasjonen "Hendelsen h er årsak til hendelsen h' i verdenen w" skal vi derfor forsøke å definere en beslektet relasjon, "Hendelsen h impliserer kausalt hendelsen h' i verdenen w". Men for å kunne formulere vår definisjon av

denne relasjon helt presist, og på en slik måte at det er mulig å bevise rent formelle resultater er det imidlertid nødvendig å innføre en del terminologi og notasjon. Dette gjør vi først.

Vi innfører det følgende uttrykk: "HEt(h;1,t,w)". Dette skal leses slik: "h;1 er en hendelse i snever forstand som inntreffer etter tidspunktet t i verdenen w". Videre innfører vi uttrykket "HFør(h;2,t;1,w)", som vi bruker som forkortelse for: "h;2 er en hendelse i snever forstand som inntreffer før tidspunktet t:1 i verdenen w." Endelig innfører vi uttrykket "CImp(h;2,h;1,w)", og det er vår hensikt at man skal lese dette slik: " Hendelsen h;2 impliserer kausalt hendelsen h;1 i verdenen w".

La oss forklare betydningen til disse uttrykk. At h er en hendelse i snever forstand som inntreffer etter tidspunktet t i verdenen w innebærer nøyaktig tre ting; for det første at h er en hendelse i snever forstand, videre at alle tidspunkter i domenet til h kommer etter t, og endelig at h foreligger realisert i den mulige verden w. At h er en hendelse i snever forstand[8] som inntreffer før tidspunktet t i verdenen w defineres på helt tilsvarende vis, bortsett fra at vi erstatter "etter" i forrige definisjon med "før". Tilslutt må vi gjøre rede for hva som menes med at en hendelse h;1 kausalt sett impliserer en annen hendelse h;2 i en gitt mulig verden w. Uttrykket "Det utsagn som hevder at hendelsen h foreligger realisert" vil vi forkorte med "ß(h)", og vi definerer dette uttrykket slik:

ß(h) = s;-1(Mg(w: wêI & (At)(têDom(h).->.
[(if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t)]êh(t)))

Dette innebærer at ß(h) er utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene hvor hendelsen h foreligger realisert.

Så over til vår definisjon av hva vi legger i uttrykket "Hendelsen h;1 impliserer kausalt hendelsen h;2 i verdenen w". Vi sier at h;1 impliserer kausalt hendelsen h;2 i verdenen w hvis og bare hvis det finnes en utsagnsmengde D som oppfyller de følgende krav:

(i) (Ax)(xêD.->. CLov(x,w)) & D≠ø
(ii) (As)(At)(sêQ & têT.->. [¬(l(s,t)êk(D)) & ¬(Neg(l(s,t))êk(D)])
(iii) ß(h;2)êk(Un(D,ß(h;1))).

Dermed har vi gitt fullstendige definisjoner av alle de uttrykk vi nå trenger. Det "årsaksprinsipp" som nå skal drøftes formulerer vi slik:

KAUSALPRINSIPP:
(CA1) HEt(h;1,t,w) ->
(At;1)(t;1<t.->(Eh;2)(HFør(h;2,t;1,w) & CImp(h;2,h;1,w)))

Vi er interessert i hvorvidt prinsippet CA1, om vi tenker oss at det holder i en eller annen verden w, impliserer at denne verden er deterministisk i en eller annen forstand. Tidligere har vi definert hva vi mener med en strengt deterministisk teori og hva vi mener med en deterministisk teori. Vi skal nå forsøke å forklare hva vi her vil forstå med uttrykket "D er en svakt deterministisk teori i verdenen w" som vi tror at kan ha en viss relevans i denne forbindelse. For dette formål finner vi det nødvendig å gi en definisjon først. La w være en eller annen mulig verden og t et tidspunkt. Da vil vi betegne det utsagnet som er sant i alle de verdner w' som er historisk ekvivalente med w opp til og inkludert tidspunktet t med FH(w,t). Rent formelt kan dette defineres slik:

DEFINISJON 11.1: Sett q(t) = Mg(t':t'êT & t'≤t) . Da fastsetter vi videre at
FH(w,t) = s;-1(Mg(w': w'êI & Ekv(q(t),w',w)))

Vi gir så den følgende definisjon av "D er en svakt deterministisk teori i w":

---

[8] Se i denne forbindelse §7.

DEFINISJON 11.2: D er en svakt deterministisk teori i verdenen w hvis og bare hvis D oppfyller de følgende krav:

(i) D Inkl U
(ii) (Ax)(xêD.->. CLov(x,w))
(iii) (As)(At)(sêQ & têT. ->. ¬(l(s,t)êk(D)) & ¬(Neg(l(s,t)êk(D)))
(iv) (At;1)(t;1êT.->.(At)(As)(têT & t;1<t & sêQ .->.
(l(s,t)êk(Un(D,{FH(w,t;1)})) v (Neg(l(s,t)êk(Un(D,{FH(w,t;1)}))

Det problem som vi nå ønsker å løse er hvorvidt den påstand at CA1 holder uinnskrenket i en verden w impliserer at det finnes en teori D som er en svakt deterministisk teori i w. Vi tror ikke dette holder ubetinget. Det synes nødvendig å ta med en tilleggspremiss. Tilleggspremissen som vi har i tankene er at teorien som består av alle kausallovene som gjelder i w ikke impliserer hverken l(s,t) eller negasjonen av dette utsagn for noen tilstand sêQ og noe tidspunkt têT. Gitt denne tilleggspremiss er følgelig vårt problem hvorvidt det er mulig, innenfor rammen av E;3+, å gi noe bevis for den følgende sats:

TEOREM 11.1: *La wêI. Anta Cd(Q)≥3. Anta at følgende påstand holder for alle h;1, h;2 og t, der h;1 såvel som h;2 er hendelser i snever forstand og t er et tidspunkt:*
(CA1) HEt(h;1,t,w) ->
(At;1)(t;1<t.->(Eh;2)(HFør(h;2,t;1,w) & CImp(h;2,h;1,w)))
Anta videre at vi definerer CT(w) = Mg(x : CLov(x,w)) og at det følgende holder:
(‡) (As)(At)(sêQ & têT .->. ¬(l(s,t)êk(CT(w)) & ¬ (Neg(l(s,t)êk(CT(w))))
Under disse forutsetninger finnes en svakt deterministisk teori i w.

Bevis: Vi skal gi et bevis for at det finnes en svakt deterministisk teori D som holder i verdenen w under forutsetning av at prinsippet (CA1) holder, og også under forutsetning av at (‡) holder. Siden konsekventen i teoremet er en eksistenssetning må vi konstruere en slik teori D. Det mest nærliggende er da å la D rett og slett være mengden av alle de kausallover som gjelder i verdenen w. La oss derfor sette : (1) D = Mg(x : CLov(x,w)). Da har vi selvfølgelig at de to første kravene i definisjonen av en svakt deterministisk er oppfylt, ie. vi har:
(2) D Inkl U og (3) (Ax)(xêD.->. CLov(x,w)). Videre er det klart at det tredje kravet i definisjonen holder. Dette følger jo direkte fra forutsetningen (‡) i teoremet. Det gjenstår derfor å vise at vi har:
(+) (At)(têT.->.(At')(As)(t'êT & t<t' & sêQ .->.
(l(s,t')êk(Un(D,{FH(w,t)})) v (Neg(l(s,t')êk(Un(D,{FH(w,t)}))
hvor FH(w,t) er definert som ovenfor. La oss nå bemerke at for å vise (+) vil det være tilstrekkelig å bevise:
(++) (At)(têT.->.(At')(t'>t & t'êT.->.(As)(sêQ& s= Hist(w)(t').
->.l(s,t')êk(Un(D,{FH(w,t)}))))
La oss bevise at (++) impliserer (+). Før vi gjør dette vil vi imidlertid komme med noen forhåndsbemerkninger. Man bør iakta at hvis s;1,s;2êQ og s;1≠s;2 så er utsagnet l(s;1,t) uforenelig med utsagnet l(s;2,t) – gitt selvfølgelig at têT. Dette er ikke særlig vanskelig å bevise. For anta at det finnes en verden w der vi mot formodning har wês(K(l(s;1,t),l(s;2,t))). Da har vi etter definisjonen av operasjonen l at TL(s;1,w,t) & TL(s;2,w,t). Dette impliserer imidlertid i lys av våre aksiomer for TL, som vi selvfølgelig må holde oss til, at s;1=s;2. (Se i denne forbindelse aksiomet (TL2).) Vi har derfor allment:
(2.1) s;1,s;2êQ &s;1≠s;2 &têT.->. s(K(l(s;1,t),l(s;2,t)))=ø.
La oss også bemerke at fra (2.1) følger videre:
(2.2) s;1,s;2êQ &s;1≠s;2 &têT.->.LK(Neg(l(s;1,t)),l(s;2,t))

For anta det motsatte holder ie. at s;1,s;2êQ &s;1≠s;2 &têT og at ¬LK(Neg(l(s;1,t)),l(s;2,t)). Da må det finnes wêI slik at True(w,l(s;2,t)) og slik at ¬True(w,Neg(l(s;1,t))). Dette impliserer åpenbart at :

True(w,l(s;2,t)) &True(w,l(s;1,t))

og derfor at s(K(l(s;1,t),l(s;2,t)))≠ø. Men dette strider mot (2.1).

La oss nå ta for oss beviset for at (++) impliserer (+). Anta (++) holder og anta t,t'êT & t'>t &sêQ for vilkårlige t,t',s. La s;0 = (ix)(TL(x,w,t')) = Hist(w)(t'). Det er da to muligheter: (a) s=s;0. I så fall følger fra (++) at l(s,t')êk(Un(D,{FH(w,t)}) og derfor også konsekventen i (+). (b) s≠s;0. Da har vi LK(Neg(l(s,t')),l(s;0,t')). Siden vi forutsetter at (++) holder må vi ha: l(s;0,t')êk(Un(D,{FH(w,t)}). Det følger i så fall at Neg(l(s,t'))êk(Un(D, {FH(w,t)}). Dette innebærer at også i dette tilfellet holder konsekventen i (+).

Det vi så langt har sett er altså at det er tilstrekkelig å gi et bevis for (++) for å bevise satsen. Imidlertid skal vi før vi avslutter beviset for satsen bevise den følgende hjelpesetning som vi har bruk for:

LEMMA 11.1: *Anta h er en hendelse i begrenset forstand som inntreffer før tidspunktet t i verdenen w, ie. anta HFør(h,t,w). Anta wêI & têT. Da har vi at ß(h) er implisert av FH(w,t), ie. LK(ß(h),FH(w,t)).*

Bevis: Siden (1) HFør(h,t,w) følger (1.1) Func(h) & (At')(t'êDom(h).->. t'>t). Dessuten følger:

(1.2) Dom(h) Inkl T & Rgn(h) Inkl Pt(Q) & (At)(têDom(h) -> Cd(h(t)) ≥2)

La oss her bare minne om at uttrykket "Cd(a)" leses "Kardinaltallet til mengden a". Videre innebærer (1) at hendelsen h foreligger realisert i verdenen w. Pr. definisjon vil dette si at :

(2) (At')(t'êDom(h).->. (if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t')êh(t')).

Vi må nå vise at konsekventen i vår hjelpesetning holder. Anta derfor for vilkårlig w' at (3) w'êFH(w,t). Da har vi per definisjon:

(4) Ekv(Mg(t;1:t;1êT & t;1≤t),w',w)

Dette impliserer:

(4.1) (At')(t'≤t. ->. Hist(w')(t') = Hist(w)(t'))

Siden Hist(w) = (if)(fêExp(Q,T)&wêG(f)) har vi derfor at:

(5) (At')(t'≤t. ->. (if)(fêExp(Q,T)&w'êG(f))(t') =
(if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t')

Anta nå (6) at t'êDom(h). Fra dette og (1) følger t'<t. Dette og (5) impliserer i sin tur at (7) (if)(fêExp(Q,T)&w'êG(f))(t') = (if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t'). Fra (6) og (2) følger imidlertid: (8) (if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t')êh(t'). Fra (7) og (8) følger videre: (if) (fêExp(Q,T)&w'êG(f))(t')êh(t'). Men siden vi antok at t' var et vilkårlig tidspunkt der (6) holdt, kan vi nå konkludere med:

(At')(t'êDom(h).->. (if)(fêExp(Q,T)&w'êG(f))(t')êh(t')). Dette innebærer at w'ês(ß(h)). Men w' var et vilkårlig element i s(FH(w,t)). Vi har derfor at:
s(ß(h)) Inkl s(FH(w,t)). Herav: LK(ß(h), FH(w,t)). Dette viser at hjelpesetningen ovenfor holder.

La oss nå fullføre beviset for satsen. Som vi nevnte ovenfor vil det være tilstrekkelig å bevise (++). Anta følgelig for vilkårlige t,t' og s at:
(1) t,t'êT & t'>t & sêQ. Anta enn mer at (2) s =Hist(w)(t'). Vis skal da vise at l(s,t')êk(Un(D, {FH(w,t)})). Siden Cd(Q)≥3 finnes det to tilstander s;1,s;2êQ slik at Cd({s,s;1,s;2}) = 3. Vi definerer to hendelser g;1 og g;2 ved:

(3) g;1 = {<t', {s;1,s}>} g;2 = {<t', {s;2,s}>}

Det skulle være lett å se at dette er to hendelser i snever forstand som foreligger realisert i w og som foreligger realisert etter tidspunktet t. Vi har altså:

(4) HEt(g;1,w,t') & HEt(g;2, w,t').

Fra dette og kausalitetsprinsippet CA1 følger da at det finnes h;1 og h;2 slik at:

(5) HFør(h;1,w,t) & HFør(h:2,w,t)

og dessuten D;1 og D;2 der D;1,D;2 Inkl U der vi har:

(6) (Ax)(xêD;1.->.CLov(x,w)) & D;1≠ø
(Ax)(xêD;2.->.CLov(x,w)) & D;2≠ø

og

(7) ß(g;1)êk(Un(D;1,{ß(h;1)})
ß(g;2)êk(Un(D;2,{ß(h;2)})

Vi ønsker å vise at l(s,t')êk(Un(D,{HF(w,t)}). Siden D er klassen av alle kausallover som gjelder i w har vi selvfølgelig at (8) D;1,D;2 Inkl D. Videre har vi i lys av hjelpesetningen som ble bevist rett ovenfor at

(9) LK(ß(h;1), FH(w,t)) & LK(ß(h;2), FH(w,t)). Fra (7) og (9) følger:

(10) ß(g;1),ß(g;2)êk(Un(D,{FH(w,t)}))

Det vil nå være tilstrekkelig å bevise at konjunksjonen av utsagnene ß(g;1) og ß(g;2) impliserer l(s,t'). Anta derfor for vilkårlig w at

(11) True(w,SNu({ß(g;1),ß(g;2)})). Da har vi i lys av definisjonen av operasjonen ß at de følgende to ting holder:

(12) (At)(têDom(g;1).->.(if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t)êg;1(t))

(13) (At)(têDom(g;2).->.(if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t)êg;2(t))

Nå har vi i lys av (3) at Dom(g;1) = Dom(g;2) = {t'}. Videre har vi g;1(t')={s,s;1} og g;2(t') = {s,s;2}. Fra disse forhold samt (12) og (13) følger:

(14) (if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t')ê{s,s;1}
&(if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t')ê{s,s;2}

Siden de tre objektene s, s;1 og s;2 er distinkte følger at

(if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t')=s

Dette innebærer at TL(s, w,t') og derfor i lys av definisjonen av operasjonen l at True(w,l(s,t')). Vi har altså vist s(SNu(ß(g;1),ß(g;2))) Inkl s(l(s,t')). Fra dette og (10) følger åpenbart at l(s,t')êk(Un(D,{FH(w,t)})). Dette viser at (++) følger fra forutsetningene i teoremet. I lys av våre tidligere bemerkninger har vi dermed fullstendigjort vårt bevis for teoremet og vist at kausalprinsippet i den form vi har gitt det, under de forutsetninger som er nevnt i satsen, impliserer den form for svak determinisme vi har definert. **Q.E.D.**

Ovenfor har vi vist at kausalprinsippet CA1 under visse forutsetninger impliserer eksistensen av en svakt deterministisk teori. Vi nevnte imidlertid tidligere også det omvendte problem: Er det slik at kausalprinsippet holder i enhver deterministisk verden ? Dette er ikke fullstendig opplagt. Studerer man den definisjonen vi har gitt av uttrykket "Δ svakt deterministisk teori i verdenen w" skulle det fremgå ved noe ettertanke at man ikke fra det faktum at det finnes en svakt deterministisk teori i en verden w kan slutte at kausalprinsippet i den form vi har gitt det ovenfor holder i denne verden w.

§12 Determinisme og frihet. Er den tanke at alt er determinert forenelig med den tanke at mennesket kan velge fritt ?

Vi skal i det følgende ta opp spørsmålet om determinisme er forenlig med det syn at mennesket i en eller annen forstand er fritt. For å kunne drøfte foreneligheten av disse to ting med en viss grad av tankeskarphet er det naturlig først å ta opp spørsmålet om hva determinisme er og innebærer på den ene side, og dernest spørsmålet om hva frihet er på den annen side. Når det gjelder spørsmålet om hva determinisme er, og hvordan dette begrep kan presiseres i forskjellige retninger, har vi nå allerede i de foregående paragrafer drøftet dette temmelig utførlig. Vår neste oppgave er derfor å analysere frihetsbegrepet, dvs. studere nær-

mere forskjellige mulige definisjoner av frihet. Dette skal vi gjøre i den følgende paragraf, §13. Dernest skal vi i de etterfølgende paragrafer, §14-16, studere nærmere kompatibilitetsspørsmålet når det gjelder determinisme og frihet.

§13 Definisjoner av frihet.

Som nevnt skal vi i dette avsnitt studere visse forsøk på å klargjøre hva man mener med frihet. Dette innebærer at vi er interessert i å formulere, og i en viss utstrekning diskutere, visse tentative definisjoner av uttrykket " x er en person som kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w".

Man kan nå spørre om det er mulig å definere dette predikatet ved hjelp av de primitive, ikke-logiske, predikatene som inngår i språket til teorien DF slik vi så langt har beskrevet den, mao. i teorien E;3+[HP1]. Dette virker mindre plausibelt og vi har ikke sett noen mulighet for hvordan dette skal gjøres. Det synes derfor nødvendig å utvide språket til E;3+[HP1] med nye predikater.

La oss på dette punkt rekapitulere definisjonen av språket til E3;+ slik vi beskrev dette språk i §3. Språket er det til teorien E;3, L(E;3), utvidet med de følgende konstruksjoner:

(i) "x er et tidspunkt".
Dette forkorter vi med "Tp(x)".

(ii) " x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y".
Denne konstruksjonen skal vi forkorte med "x<y".

(iii) " w er den aktuelle verden ".
Dette predikatet forkorter vi med "Aktuell(w)"

(iv) " x er en totaltilstand som foreligger realisert i verdenen w ved tidspunktet t"
Denne konstruksjonen forkorter vi med "TL(x,w,t)".

(v) " x er en kausallov som gjelder i verdenen w"
Denne konstruksjonen forkorter vi med "CLov(x,w)"

(vi) "x er et reelt tall som angir avstanden mellom tidspunktet t;1 og tidspunktet t;2 "
Denne konstruksjonen forkorter vi med: "Dist(x,t;1,t;2)"

Som nevnt i §3 kaller vi det språket som fremkommer som resultat når det ikke-logiske vokabularet i L(E;3) utvides predikatene (i) til (vi) for L;+(E;3).

For å få en begrepsramme hvor det er mer sannsynlig at man kan formulere fruktbare definisjoner av frihet skal vi nå trekke inn språket til teorien HT. Dette språket har vi beskrevet i arbeidet "En teori om handlinger og handlingsalternativer.", Rognes [8]. Også dette språket er en utvidelse av L(E,3). Det fremkommer ved at man utvider det ikke-logiske vokabularet til L(E;3) med predikatene (i) og (ii) ovenfor. I tillegg må man ta med de følgende konstruksjoner:

(vii) "x er en person".
Dette forkorter vi med "P(x)".

(viii) " y er et utsagn som beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w".
Denne konstruksjonen skal vi forkorte med "M;t(y,x,w)".

(ix) "y er et utsagn som beskriver noe x realiserer i verdenen w".
Dette predikatet forkorter vi med "Br(y,x,w)"

I tillegg til disse predikatene skal vi nå også ta med ett som ikke inngår i det ikke-logiske vokubularet til hverken språket L;+(E;3) eller til språket til HT:

(x) "y er et utsagn som beskriver et forhold som x fatter en beslutning om å realisere ved tidspunktet t i verdenen w".
Dette predikatet forkorter vi med "Besl(y,x,t,w)"

Dermed har vi laget en liste over alle de predikatene vi vil ta i betraktning.

Vi nevnte i innledningen at vi ville definere helt rigorøst en bestemt første-ordens teori DF. Denne ble delvis definert i §3. Teorien E;3+[HP1] er faktisk den første delen av DF. Vi kan nå gi en helt presis definisjon av språket til denne teorien DF, som vi betegner med "L(DF)":

L(DF) er det første-ordens språk som fremkommer som resultat når det ikke-logiske vokubularet til L(E;3), språket til teorien E;3, utvides med predikatene (i) - (x).

Imidlertid er selve teorien DF ikke eksakt definert før vi angir presist de ikke-logiske aksiomene i den. Dette skal vi for oversiktens skyld gjøre nå.

De ikke-logiske aksiomene i teorien DF er nøyaktig de følgende formler i L(DF):

(a) Alle ZFCu-aksiomene i L(DF). Dette innebærer mer spesielt at alle instanser av replacement- og utsondringsaksiomene i L(DF) er ikke-logiske aksiomer i DF.

(b) Alle de ikke-logiske aksiomene i teorien E;3 som ikke er blandt dem som ble nevnt under punkt (a).

(c) Alle aksiomene som ble nevnt i §3. Dette innebærer at formlene T1 -T7, ME1 - ME3, AK1,AK2, TL1 - TL7, CL1 og CL2 er ikke-logiske aksiomer i DF.

(d) Alle de ikke-logiske aksiomene i teorien HT[9] som ikke er mengde-teoretiske aksiomer eller hører med blandt de ikke-logiske aksiomene i E;3. Vi vil gi et sammendrag av disse formlene i HT rett nedenfor.

(e) Den følgende formel som angir en helt triviell egenskap ved predikatet (ix):

(Q1) Besl(y,x,t,w) -> yêU &têT &P(x) & wêI

Som man ser uttrykker denne formelen den påstand at dersom y er et utsagn som beskriver et forhold som x ved tidspunktet t i verdenen w fatter en beslutning om å realisere, så er y et utsagn, t et tidspunkt, x en person og w en logisk mulig verden. Setningen er av en helt analytisk karakter og kan derfor neppe seriøst betviles.

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av teorien DF. Dette er den første-ordens teorien hvis språk er L(DF) og hvor de ikke-logiske aksiomene er nøyaktig dem som er nevnt under punkt (a) - (e).

Vi skal nå, for oversiktens skyld gi et sammendrag av de HT- aksiomene som inngår i teorien. Imidlertid henviser vi til arbeidet Rognes [8] for en mer utførlig diskusjon og motivasjon av disse aksiomene.

Først minner vi om at vi med en teori-familie over en mengde X forstår en funksjon som til ethvert element i X til ordner en mengde med utsagn, mao. en hvilken som helst funksjon i Exp(Pt(U),X). Hvis T er en teorifamilie sier vi at C utgjør en basis for T, i symboler "Bas(C,T)" hvis og bare hvis T og C oppfyller de følgende krav:

(o) CêPt(Pt(U))
(i) (Ax)(xêC.-> (s(SNu(x)) ≠ø)
(ii) C≠ø & C Inkl Rgn(T)
(iii) (Ay)[yê Rgn(T).->. (Ex)(xêC & (s(SNu(x)) Inkl s(SNu(y)))]
(iv) (Ax)[xêC.->. -(Ey)(yê Rgn(T) &

[9] Se Rognes [8] §3 for en detaljert og presis fremstilling av teorien HT.

s(SNu(y)) SInkl s(SNu(x)))]

(v) (Ax)(Ay)[x,y êC & x≠y .-> s(K(SNu(x),SNu(y)))=ø]

For å kunne formulere aksiomene trenger vi også de følgende definisjoner: Vi setter C(w,x,t) = Mg(y : M;t(y,x,w)) og Q(w,x,t) = Mg(<a,k({a})> : aêC(w,x,t)). Vi kaller C(w,x,t) for klassen av de handlingsmuligheter som står åpne for x ved t i verdenen w. Q(w,x,t) kaller vi for handlingspotensialet til x ved t i verdenen w. Endelig gjør vi oppmerksom på at vi setter Br*(a,x) = s;-1(Mg(w: Br(a,x,w))). Br*(a,x) er som man ser fra definisjonen det utsagnet som er sant i alle de verdenene hvor utsagnet a beskriver noe x realiserer. Vi skal bruke lesemåten "Utsagnet at a beskriver noe x realiserer" for "Br*(a,x)".

De HT-aksiomene som inngår i teorien er de følgende:

AT 0.1 (Br(a,x,w).->.aêU & P(x) & wêI) &
(M;t(a,x,w).->.aêU & P(x) & wêI &Tp(t))
AT 0.2 Mng(Mg(x: P(x)))
AT 1 Br(a,x,w).->. wês(a)

AT 2 zêU &s(SNu(Mg(x:Br(x,y,w)))) Inkl s(z) & wêI & P(x):
->.Br(z,y,w)[10]
AT 3 Br(a,x,w). -> .Br(Br*(a,x),x,w)
AT 4 M;t(a,x,w) & bêU & s(a) Inkl s(b). ->. M;t(b,x,w)
AT 5 Bas(C,Q(w;1,x,t)).->.(Ay)(yêC.->.(Ew;2)(w;2 ê I &.
w;2ês(Br*(SNu(y),x)) & Q(w;1,x,t)=Q(w;2,x,t)))
AT 6 (Ea)M;t(a,x,w).->. (EC)(Bas(C,Q(w,x,t)) & C≠ø)
AT 7 Bas(C,Q(w,x,t).->.(Eh)(hêC & wês(Br*(SNu(h),x))). [11]

Vi har nå gitt en helt fullstendig oversikt over teorien DF. La oss notere et par ting tilslutt før vi går over til det som er vår egentlige oppgave i denne paragrafen, nemlig å formulere definisjoner av "x er en person som kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w".

For det første nevner vi at vi definerer "h er et handlingsalternativ som som står åpent for x ved tidspunktet t i verdenen w" , Alt;w(h,x,t), som i Rognes [8], dvs. ved:

Alt;w(h,x,t) <-> (EC)(Bas(C,Q(w,x,t) & hêC)

For det andre nevner vi at vi innfører en beslektet relasjon, "u er et utsagn som beskriver et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t i verdenen w", som vi forkorter dette med "Ah;t(u,x,w)". Dette definerer vi på den følgende måte:

DEFINISJON 13.1: Ah;w(u,x,t) <-> [M;t(u,x,w) &
¬(Eu')(u'êU& s(u')≠ø & s(u') SInkl s(u) & M;t(u',x,w))]

I følge denne definisjonen er altså u et utsagn som beskriver et handlingsalternativ som står åpent for x ved t i verdenen w hvis og bare hvis u oppfyller de følgende betingelser: (a) u beskriver noe det står i x's makt å realisere relativt til t i verdenen w. (b) Det finnes intet konsistent utsagn som strengt impliserer u og som også beskriver noe det står i x makt å realisere relativt til t i verdenen w.

For det tredje nevner vi at siden alle aksiomene i teorien HT inngår som aksiomer i teorien DF kan alle de teoremene som har blitt utledet i Rognes [8] også kan utledes i

[10] Vi gjør oppmerksom på at uttrykket "konjunksjonen av alle utsagnene i mengden X ", i symboler "SNu(X)", er definert slik:

SNu(X)= (iu)(uêU & s(u)=IΩSn(Mg(s(y):yêX)))
= (iu)[uêU & s(u)=IΩMg{w: (Ay)(yêX.->.wês(y))}]

Man ser fra denne definisjonen at SNu(X)=(iu)(uêU &s(u)=I) om X er den tomme mengden.

[11] Vi henviser igjen til Rognes [8] §2 for mer detaljerte komentarer til disse setningene.

teorien DF. Videre vil alle de definisjonene som vi innførte i forbindelse med HT også kunne brukes i forbindelse med den teorien vi har utformet her.

Endelig gjør vi oppmerksom på at det følgende teorem holder:

TEOREM 13.1 *Vi har : (Au)(uêU -> [Alt;w(k({u}),x,t) <–> Ah;w(u,x,t)])*

Vi skal ikke gi beviset for denne setningen her, men nevner bare at den kan bevises ved hjelp av Teorem 5.4.3 og Teorem 5.4.4 i Rognes [8]. La oss nå gå over til å betrakte forskjellige definisjoner av frihet.

§13.1 Definisjon 1 av frihet.

Det første definisjonsforslaget som vi vil oppholde oss ved er dette:

Man kunne si at en person x kan velge fritt ved et bestemt tidspunkt t i verdenen w hvis og bare hvis det finnes to logisk sett uforenelige utsagn u;1 og u;2 som begge beskriver forhold som det står i x´s makt å realisere i verdenen w fra og med tidspunktet t, mao. hvis og bare hvis vi har :

(Eu;1)(Eu;2)(u;1,u;2êU & s(u;1)Ωs(u;2)=ø & M;t(u;1,x,w)&M;t(u;2,x,w))[12]

Vi tillater oss å formalisere denne definisjonen, og i det vi bruker "Fri(x,t,w)" som forkortelse for "x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w", kan definisjonen formuleres slik:

(F1) Fri(x,t,w) <-> (Eu;1)(Eu;2)(u;1,u;2êU &
s(u;1)Ωs(u;2)=ø & M;t(u;1,x,w)&M;t(u;2,x,w))

Det virker som om denne definisjonen til en viss grad er plausibel. La oss foreta noen løsere og mer intuitivt betonte overlegninger i forbindelse med den. Anta først at man hevder at x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w. Det synes da svært rimelig å kreve at det må finnes minst to mulige handlingsalternativer som står åpne for x ved dette tidspunkt t i verdenen w. Videre må disse utelukke hverandre. For hvis det bare er ett alternativ som står åpent synes det urimelig å hevde at x i noen rimelig forstand kan velge. Men hvis det står to handlingsalternativer åpne for x virker det også rimelig å hevde at det må stå i denne personens makt å kunne realisere såvel det ene alternativ som det andre. Det virker derfor ikke spesielt urimelig å hevde at det da må finnes to logisk sett uforenelige utsagn u;1 og u;2 som begge beskriver forhold det står i x's makt å realisere relativt til t i w. Disse betraktningene kunne tas til inntekt for kondisjonalen mot høyre i definisjonen F1. På den annen side synes det også å være slik at hvis to logisk sett uforenelig utsagn begge beskriver forhold som det står i individet x's makt å realisere relativt til t i verdenen w så må minst to alternativer stå åpne for dette individ. Men dette i sin tur synes å innebære at x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w. Kondisjonalen mot venstre i (F1) synes derfor også å være til en viss grad plausibel.

Uansett om man aksepterer overlegningene ovenfor kan det imidlertid noteres at det følgende teorem holder om man aksepterer F1:

TEOREM 13.1.1: *Anta wêI og têT. Da gjelder:*
Fri(x,t,w) <–> (Eh;1)(Eh,2)(h;1≠h;2 & Alt;w(h;1,x,t) & Alt;w(h;2,x,t))

[12] Forutsetter vi teorien HT innebærer dette at det må finnes minst to handlingsalternativer som står åpne for individet x relativt til tidspunktet t i verdenen w.

Man ser altså at dersom man tar for gitt handlingteorien HT, så er definisjonen ovenfor ekvivalent med den tanke at en person kan velge fritt ved et bestemt tidspunkt t hvis og bare hvis minst to handlingsalternativer står åpne for vedkommende ved dette tidspunkt.

§13.2 Definisjon 2 av frihet.

Av og til knyttes frihet, ikke så meget til handlingsmuligheter i en eller annen forstand, som til en persons vilje. Det synes som om noen er villige til å hevde at kroppens bevegelser nok kan være fullstendig determinert av ytre faktorer som helt undrar seg vår kontroll, men likevel er vår vilje fri. Selvom man ikke kan endre noe på den ytre fysiske verdens gang kan det likevel ved visse anledninger stå i ens makt å fatte en beslutning om å utføre en eller annen handling samtidig som det står i ens makt å fatte en beslutning om å utføre en annen og helt uforenelig handling. Man har så og si en mulighet for å kontrollere visse sider ved ens indre sjelelige liv, selvom man ingen muligheter har for å kontrollere de rent fysiske naturprosesser. Det er blandt annet for å kunne belyse visse sider ved slike synspunkter på frihet, hva enten de oppfattes som plausible eller ikke, at vi i språket L(DF) har innført predikatet "Besl(y,x,t,w)".

La oss nå betegne utsagnet s-1(Mg(w: Besl(y,x,t,w))) med "Besl*(y,x,t)". Det sistnevnte uttrykk betegner da utsagnet at y beskriver et forhold x fatter en beslutning om å realisere ved tidspunktet t. Man kunne nå tenke seg å ta i betrakning den følgende definisjon:

(F2) x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis det finnes to utsagn h;1 og h;2 der s(h;1)Ωs(h;2)=ø og hvor man har at M;t(Besl*(h;1,x,t),x,w) & M;t(Besl*(h;2,x,t),x,w).

La oss formulere den definisjonen vi nå betrakter helt eksplisitt:

(F2) Fri;2(x,t,w) <-> [(Eh;1)(Eh;2)(h;1.h;2êU & s(h;1)Ωs(h;2)=ø &
M;t(Besl*(h;1,x,t),x,w) & M;t(Besl*(h;2,x,t),x,w)]

Inne i definiens i denne definisjonen forekommer konjunksjonen:
"M;t(Besl*(h;1,x,t),x,w) & M;t(Besl*(h;2,x,t),x,w)".
Det første utsagnet i denne konjunksjon uttrykker at utsagnet at h;1 beskriver et forhold x fatter en beslutning om å realisere ved t, er et utsagn som det står i x´s makt å realisere relativt til t i verdenen w. Den andre konjunkten sier det samme om h;2. (F2) uttrykker derfor at x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis det finnes utsagn h;1 og h;2 der h;1 så vel som h;2 er utsagn som det står i x´s makt å fatte en beslutning om å realisere ved tidspunktet t i verdenen w og hvor h;1 og h;2 er logisk sett uforenelige.

Det kan ha en viss interesse å studere forholdet mellom (F1) og (F2). Det bør bemerkes her at den høyre komponenten i (F2) ikke impliserer definiens i den definisjonen vi betraktet ovenfor dvs. (F1). Dette kommer av at man ikke fra det forhold at s(h;1)Ωs(h;2)=ø kan slutte at Besl*(h;1,x,t) er uforenelig med Besl*(h;2,x,t), dvs. at s(Besl*(h;1,x,t))Ω(Besl*(h;2,x,t))=ø.

Det kan på dette punkt være på sin plass stanse opp litt, og kommentere forholdet mellom (F2) og (F1) mer utførlig. Når det gjelder predikatet Besl har vi så langt bare antatt at den følgende setning gjelder:

(Q1) Besl(u,x,t,w).->. uêU&têT & wêI &P(x)

La oss nå se på den følgende setning:

(1) u;1,u;2êU &s(u;1)Ωs(u;2)=ø.->.
¬(Ew)(wêI & Besl(u;1,x,t,w)& Besl(u;2,x,t,w))

Forutsetter vi at denne holder for alle u;1, u;2, x og t følger at høyre side i (F2) impliserer høyre side i (F1). Grunnen skulle være nokså åpenbar. Fra (1) følger at (2) s(Besl*(u;1,x,t))Ωs(Besl*(u;2,x,t)) =ø om u;1,u;2êU &s(u;1)Ωs(u;2)=ø , gitt den definisjonen vi har gitt av operasjonen Besl*. Anta nå at høyre side i (F2) holder. Da følger eksistensen av h;1 og h;2 der vi har:

(3) h;1.h;2êU & s(h;1)Ωs(h;2)=ø &
M;t(Besl*(h;1,x,t),x,w) & M;t(Besl*(h;2,x,t),x,w)]

Setter vi u;1=Besl*(h;1,x,t) og u;2=Besl*(h;2,x,t) følger fra (1) og (2) at

(4) u;1,u;2êU & s(u;1)Ωs(u;2)=ø & M;t(u;1,x,w)&M;t(u;2,x,w))

som nettopp impliserer høyre side i (F1).

I denne forbindelse kan det ha interesse å se nærmere på hva slags setninger som eventuelt kunne gjelde i forbindelse med konstruksjonen Besl(u,x,t,w). La oss kalle mengden av alle de utsagn som beskriver forhold individet x fatter en beslutning om å realisere ved tidspunktet t i verdenen w for *individet x´s beslutningsfelt relativt til paret <t,w>*. En rekke spørsmål kan åpenbart stilles om dette beslutningsfelt. Kan det inneholde mer enn et utsagn, mao. er det mulig at det kan finnes to eller flere distinkte utsagn som beskriver forhold man fatter en beslutning om å realisere ved et tidspunkt ? Er beslutningsfeltet til en person x relativt til et par <t,w> alltid en konsistent utsagnsmengde ? Er det mulig å hevde at beslutningsfeltet er en utsagnsmengde som er deduktivt lukket? Disse, og en rekke andre spørsmål, fortjener en nærmere drøftelse. F. eks. kunne man diskutere om ikke beslutningsfeltet til en person x relativt til <t,w> nettopp burde oppfattes som en konsistent utsagnsmengde lukket under endelig konjunksjon og logisk implikasjon. Mao. man kunne diskutere nærmere konsekvensene av lukningen den følgende tese:

(Q2) T=Mg(u: Besl(u,x,t,w))& T≠ø. ->.[(Aa)(Ab)(a,bêT->.K(a,b)êT) &
(Aa)(Ab)(aêT &LK(b,a).->.bêT) &Cons(T)]

Vi vil ikke ta noen definitiv stilling til (Q2) her. Det ville være en overdrivelse å si at setningen er innlysende og det ville være merkverdig om man aksepterte den ukritisk. En ting man kan si er at hvis (Q2) aksepteres vil operasjonen Besl* fungere som en nokså svak deontisk modaloperator. En annen ting som det er naturlig å nevne i forbindelse med (Q2) er at det kanskje bare er rimelig å hevde at at denne setningen holder om man tar det forbehold at x i en viss forstand er et rasjonelt individ som er klar over de logiske konsekvenser til de utsagn som inngår i beslutningsfeltet. Fra (Q2) følger for eksempel at det er umulig å tenke seg at det skulle eksistere to utsagn u;1 og u;2 der u;1 logisk sett impliserer negasjonen av u;2 og en person som fatter en beslutning om å realisere de forhold som to utsagn u;1 og u;2 beskriver. Det kan - i det minste ved første øyekast - virke eiendommelig hvorfor det absolutt skulle være utelukket at en person kan fatte to slike inkonsistente beslutninger. La oss bemerke at tesen (Q2) impliserer setningen (1) som vi nevnte tidligere. Dette innebærer derfor at (Q2) sammen med høyre side i (F2) impliserer høyre side i definisjonen (F1).

§13.3 Definisjon 3 av frihet.

Vi skal også ta i betraktning ytterligere to definisjoner av predikatet "Fri(x,t,w)". Den første av disse er den følgende variant av (F1):

(F3) Fri;3(x,t,w) <-> (Eu)[uêU & M;t(Besl*(u,x,t),x,w) &
M;t(Neg(Besl*(u,x,t)),x,w)]

Man ser at denne definisjonen uttrykker at x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis det finnes et utsagn u som oppfyller de følgende to betingelser: (i) Utsagnet at u beskriver et forhold x fatter en beslutning om å realisere ved tidspunktet t er et utsagn som det står i x´s makt å realisere relativt til t i verdenen w og (ii) Negasjonen av utsagnet at u beskriver et forhold x fatter en beslutning om å realisere ved tidspunktet t er et utsagn som det står i x´s makt å realisere relativt til t i verdenen w. Det kan være vanskelig å si om denne definisjonen er adekvat på noe vis. Vi skal ikke ta noen definitiv stilling til det. Ved første øyekast kan den i det minste sies å ha en viss plausibilitet.

I forbindelse med (F3) skulle det være ganske åpenbart at definiens i denne definisjonen impliserer definiens i (F1). Når det derimot gjelder definisjonens forhold til (F2) er saken ikke så enkel. Det bør bemerkes at definiens i (F2) ikke alene impliserer definiens i (F3).

Vi kan derimot vise at dersom (Q2), og det følgende prinsipp :

(+) (M;t(u,x,w) & LK(p,u).-> M;t(p,x,w)) holder for alle u,p,x,w og t,

så har vi at den følgende formel:

(A) [(Eh;1)(Eh;2)(h;1.h;2êU & s(h;1)Ωs(h;2)=ø &
M;t(Besl*(h;1,x,t),x,w) & M;t(Besl*(h;2,x,t),x,w)]

impliserer formelen:

(B) (Eu)[uêU & M;t(Besl*(u,x,t),x,w) &
M;t(Neg(Besl*(u,x,t)),x,w)]

mao. at definiens i definisjon (F2) impliserer definiens i definisjon (F3).[13]

La oss gi et bevis for dette: Anta at de nevnte forutsetninger holder. Vi skal først vise at hvis (0) u;1,u;2êU & s(u;1)Ωs(u;2)=ø så har vi :

(1) s(Besl*(u;2,x,t)) Inkl s(Neg(Besl*(u;1,x,t))).

Anta at (0) holder. Det følger da at s(u;2) Inkl s(Neg(u;1)). Dette innebærer i sin tur at (2) LK(Neg(u;1),u;2). Anta for vilkårlig w at wês(Besl*(u;2,x,t)). Det følger at u;2ê Mg(u: Besl(u,x,t,w)). Fra dette (Q2) og (2) følger imidlertid at Neg(u,1)ê Mg(u: Besl(u,x,t,w)). Herav følger wês(Besl*(Neg(u;1),x,t)). Hadde vi nå mot formodning at Besl(u;1,x,t,w) ville vi ha hatt at K(u;1,Neg(u;1)ê Mg(u: Besl(u,x,t,w)). Men dette strider mot at Mg(u: Besl(u,x,t,w)) ifølge (Q2) skal være konsistent. Dette viser at (1) holder. Fra (1) følger åpenbart at:

LK(Neg(Besl*(u,1,x,t)),Besl*(u;2,x,t))

Anta nå at (A) holder. Da finnes h;1,h;2 der:

(3) h;1.h;2êU & s(h;1)Ωs(h;2)=ø &
M;t(Besl*(h;1,x,t),x,w) & M;t(Besl*(h;2,x,t),x,w)

Fra det vi nettopp har bevist følger : LK(Neg(Besl*(h;1,x,t)),Besl*(h;2,x,t)). Men fra dette, (3) og prinsippet (+) har vi M;t(Neg(Besl*(h;1,x,t)),x.w). Dette viser imidlertid at vi må ha:

(Eu)[uêU & M;t(Besl*(u,x,t),x,w) & M;t(Neg(Besl*(u,x,t)),x,w)]

som er det vi ønsker. Mao. holder (Q2) og prinsippet (+) har vi at definiens i (F3) er implisert av definiens i (F2). Det fremgår av dette at det frihetsbegrep som er definert ved (F2) er det sterkeste og det mest restriktive.

§13.4 Definisjon 4 av frihet.

Det er imidlertid en fjerde mulig eksplikasjon av frihetsbegrepet som vi også kan tenke oss å ta i betraktning i denne forbindelse. La oss anta at M;t(u,x,w), mao. at u er et utsagn som beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t. Følger det da at det også står i x's makt å fatte en beslutning om å realiserer det forhold som utsagnet u beskriver? Uttrykt på en annen måte, er det slik at den følgende setning holder generelt:

---

[13] Det er imidlertid en viss mulighet for at svakere forutsetninger ville være tilstrekkelige her. Men vi har ikke gjort dette spørsmål til gjenstand for nærmere granskning.

(#) M;t(u,x,w) ->. M;t(Besl*(u,x,t),x,w)

Hvis dette er tilfelle har vi at definiens i (F1) impliserer definiens i (F2). Dette vil i så fall i sin tur innebære at definisjonen (F1) ville være ekvivalent med definisjonen (F2) om vi i tillegg antar at (Q2) holder.

Saken er imidlertid om man uten videre kan gå ut fra at (#) holder. Det er virker svært vanskelig å si noe definitivt om hvorvidt denne setningen er rimelig eller ikke. Men det er kanskje noe som kan tale til fordel for den: Anta man hevder om en person x at vedkommende kunne ha gjort et eller annet h ved et tidligere tidspunkt. La oss kalle dette tidspunktet t'. Det står med andre ord i denne personen x's makt å gjøre h ved dette tidspunktet t'. Man kunne da kanskje hevde at i så fall må denne personen ha vært klar over – enten ved tidspunktet t' eller tidligere – at vedkommende kunne gjøre h ved t'. For hvis dette ikke var tilfelle virker det urimelig å si at det å gjøre h egentlig sto i vedkommendes makt ved t'. Men hvis vedkommende var klar over at det sto i vedkommendes makt å gjøre h ved t' kunne man hevde at det også nødvendigvis måtte stå i vedkommendes makt å fatte en beslutning om å realisere h ved t'. I lys av slike overveielser kan kanskje (#) få et skjær av plausibilitet.

Det er imidlertid også slik at man kan tenke seg innvendinger mot prinsippet (#). Vi definerer induktivt en sekvens av utsagn

/Besl*;n(u,x,t)/nêNat

ved de følgende to klausuler:

(i) Besl*;0(u,x,t)=Besl*(u,x,t)
(ii) Besl*;(n+1)(u,x,t)=Besl*;n(Besl*(u,x,t),x,t)

Gitt denne definisjonen kan man vise:

TEOREM 13.4.1 *Anta (#) holder generelt. La nêN. Da gjelder:*
M;t(u,x,w) ->. M;t(Besl;n(u,x,t),x,w)*

Dette teoremet bevises ved et helt trivielt induksjonsbevis på n og vi utelater det av denne grunn. Konsekventen i dette teoremet kan imidlertid, selvom den ikke på noen måte representerer noen motsigelse, virke svært eiendommelig. Hvis man imidlertid i tillegg til (Q2) antar at (Q3) utsagnet C(Besl*(u,x,t),u) er med i beslutningsfeltet til x relativt til <t,w> for alle utsagn u om dette felt ikke er tomt, og dessuten at (Q4) LK(Besl*(Besl*(u,x,t),x,t), Besl*(u,x,t)) om uêU, er det lett å vise at man har at Besl*(u,x,t)=Besl*;n(u,x,t) for alle n>0.[14] Dette kan bidra til å mildne det litt paradoksale inntrykk som konsekventen i teoremet ovenfor kan gi en.

Men selvom man forkaster (#) kan det imidlertid virke rimelig å hevde at dersom man skulle kunne si om en person at vedkommende kan velge fritt ved et gitt tidspunkt er det ikke bare nødvendig at det finnes to uforenelige utsagn som beskriver forhold som det står i vedkommendes makt å realisere, men man bør også kreve at det for hvert av disse utsagn står i personens makt å fatte en beslutning om å realisere det forhold utsagnet beskriver. Betraktninger av denne art synes å kunne motivere den følgende definisjon:

(F4) Fri;4(x,t,w) <-> [(Eh;1)(Eh;2)(h;1.h;2êU & s(h;1)Ωs(h;2)=ø &
M;t(h;1,x,w) &M;t(h;2,x,w)&M;t(Besl*(h;1,x,t),x,w) & M;t(Besl*(h;2,x,t),x,w)]

[14] Vi overlater til leseren å forsøke seg på beviset for dette. Beviset har forsåvidt også mindre interesse akkurat her.

Når det gjelder denne definisjonen ser man at det er trivielt at definiens her impliserer definiensuttrykket i definisjonen (F2). Videre skulle det være klart at høyre side i definisjonen ovenfor også impliserer definiensuttrykket i definisjon (F1). Hvis vi videre antar at prinsippet (Q2) er riktig og at formelen (+) som ble nevnt i forrige paragraf holder generelt har vi også at høyre side i (F4) impliserer definiens i (F3), mens det omvendte ikke holder. Det fremgår av disse overveielsene at frihetsbegrepet definert ved (F4) er det mest restriktive av de frihetsbegrepene som vi så langt har definert.

Det kan være passende å foreta en oppsummering på dette punkt. For det første har vi i denne paragrafen spesifisert fire definisjoner av uttrykket "x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w". Disse definisjonene har blitt formelt sett helt rigorøst formulert i det man ser at definiensuttrykkene i alle definisjonene er åpne setninger i språket L(DF). Vi har sett at det tilsynelatende svakeste av disse fire frihetsbegrepene er det som er definert ved (F1). Videre fremgår det av våre overveielser at om man aksepterer prinsippet (Q2) kan man i teorien DF vise at Fri;4(x,t,w) impliserer at Fri;2(x,t,w), og at dette i sin tur impliserer at Fri;3(x,t,w). Som påpekt impliserer det siste at Fri(x,t,w). Det er bare i forbindelse med den andre av disse implikasjonene at man behøver å trekke inn (Q2). Aksepterer man ikke dette prinsipp, men bare de øvrige som inngår i teorien DF, kan man bare vise at Fri;4(x,t,w) impliserer at Fri;2(x,t,w) og Fri(x,t,w). Videre selvfølgelig at Fri;3(x,t,w) impliserer Fri(x,t,w). Men noe mer enn dette kan man da ikke vise.

Det er imidlertid et forhold som det kan ha en viss interesse å påpeke. Dette forhold angår setningen (#) som vi betraktet ovenfor. Saken er den at hvis man aksepterer denne setningen, og i tillegg prinsippet (Q2), noe som kanskje ikke behøver å være så motintuitivt som man kanskje er tilbøylig til å tro, kan man vise at de fire definisjonene er ekvivalente. Vi overlater til leseren å gi et bevis for denne påstand siden beviset for dette er av en relativt triviell natur.

De resultatene vi har omtalt ovenfor oppsummeres for tydelighetens skyld i det følgende teorem:

TEOREM 13.4.2 *(a) Vi har at følgende påstander holder:*

(i) Fri;4(x,t,w) –> Fri;2(x,t,w)

(ii) Fri;4(x,t,w) –> Fri(x,t,w)

(iii) Fri;3(x,t,w) –> Fri(x,t,w)

(b) Antar vi at setningen (Q2) holder, har vi :

Fri;4(x,t,w) –> Fri;2(x,t,w) –> Fri;3(x,t,w) –> Fri(x,t,w)

(c) Antar vi enn mer at (Q2) og (#) holder, har vi:

Fri;4(x,t,w) <–> Fri;2(x,t,w) <–> Fri;3(x,t,w) <–> Fri(x,t,w)

Dette avslutter vår gjennomgåelse av de frihetsdefinisjonene vi skal ta i betraktning i det følgende.

§14 Tilleggspremisser.

I §8 definerte vi en rekke determinismebegreper. Vi definerte f.eks. predikatet "Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a", i symboler: "DetM(Δ,w,a)". Ved hjelp av dette predikatet kan vi, som allerede antydet i innledningen, gi et mer presist innhold til den temmelig vage og uklare frasen "w er en mulig verden hvor alt som skjer er bestemt i overenstemmelse med strenge naturlover". Man kan f.eks. foreslå å bruke dette vage uttrykket synonymt med "Det finnes en utsagnsmengde Δ og et reellt tall a slik at Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a". Dette kan også uttrykkes i symboler ved: "(EΔ)(Ea)(Δ Inkl U & aêReell & DetM(Δ,w,a)". Hvorvidt frihet er forenelig med determinisme vil da selvfølgelig avhenge av hva man mener med frihet. Hvis man har den

første av de frihets-definisjonene vi presenterte ovenfor i tankene, kan spørsmålet om forenelighet formuleres slik:

(1) (Ew)(wêI & (EΔ)(Ea)(Δ Inkl U & aêReell
& DetM(Δ,w,a) &(Ex)(Et)(Fri(x,t,w))

Benytter man seg av noen av de andre predikatene vi definerte i §8 i stedet for "DetM(Δ,w,a)", og en annen av de frihetsdefinisjonene vi drøftet i forrige paragraf i stedet for "Fri(x,t,w)", fremkommer andre setninger av lignende art som (1). [15] Nå er imidlertid hverken setningen (1), eller negasjonen av den, noe teorem i teorien DF. Dette er riktignok ikke et forhold vi har gitt et formelt bevis for, men det virker svært rimelig fordi vi i teorien DF ikke har noen ikke-logiske aksiomer som forbinder eksplisitt de predikatene som inngår i definens i definisjonen av "DetM(Δ,w,a)" med dem som inngår i frihetsdefinisjonene.

Spørsmålet oppstår derfor om det er mulig å formulere noen plausible generelle setninger innenfor rammen av L(DF) som sammen med eventuelle andre tilleggspremisser impliserer negasjonen av (1), eller forskjellige varianter av denne setningen. I denne forbindelse skal vi i de følgende paragrafer se på fem mulige kandidater, C1 – C5. I §15 skal vi så detaljert drøfte deres relevans for kompatibilitets-spørsmålet.

§14.1 Setningen C1

Vi skal først se på den følgende setning. Den sier at dersom u er et utsagn som beskriver et forhold som det står i x´s makt å realisere fra og med tidspunktet t i verdenen w, og negasjonen av u oppfyller den samme betingelse, så finnes det ikke noen tilstand s og noe tidspunkt t' og noen mengde D som oppfyller følgende krav:

(a) Tidspunktet t´ kommer før tidspunktet t
(b) Totaltilstanden s foreligger realisert ved tidspunktet t´ i verdenen w
(c) Alle utsagnene i D er kausallover som gjelder i verdenen w
(d) Teorien UN(D,{l(s,t´)}) impliserer enten u eller negasjonen av u.

La oss kalle denne påstand for (C1). Setningen kan formuleres slik i symboler:

(C1) (M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w)).->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')})))]

La oss forsøke å motivere tesen (C1) ved å studere et resonnement til fordel for den: Anta p er en person og at det ved tidspunktet t står en kaffekopp fremfor p på et bord hvor det også står en flaske. La u;1 være det utsagn at p beveger kaffekoppen fem centimeter nærmere flasken umiddelbart etter tidspunktet t og la u;2 være det utsagn at p beveger kaffekoppen fem centimeter vekk fra flasken umiddelbart etter t. La oss nå anta at det faktisk er slik at utsagnet u;1, såvel som negasjonen av u;1, beskriver forhold som det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t. Vi skal nå se på visse antagelser som tilsynelatende er i strid med dette: La oss tenke oss at t' er et tidspunkt som kommer før t, og at s er den totale verdenstilstand som foreligger realisert ved tidspunktet t'. l(s,t') er da det sanne utsagn som sier at denne totaltilstand foreligger ved t'. Anta nå først at C er et sett med sanne, strenge kausallover og at vi fra disse sammen med utsagnet l(s,t') logisk sett kan utlede u;1. Det synes da rimelig å si at p ikke ved noe tidspunkt som kommer etter t', og derfor heller ikke ved tidspunktet t, kan forhindre at u;1 intreffer. I så fall virker det rimelig å benekte at

[15] Som man husker formulerte vi i §2 ialt seks mulige presiseringer av den vage frasen "w er en mulig verden hvor alt som skjer er bestemt i overenstemmelse med strenge naturlover". I forrige paragraf så vi på fire forskjellige mulige presiseringer av "x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w". Det er derfor mulige å formulere 24 forskjellige teser av typen (1) om man har disse presiseringene i tankene.

negasjonen av u;1 beskriver noe som det står i p's makt å realisere relativt til t. Anta på den annen side at C er den samme mengden med kausallover, men at disse, sammen med l(s,t'), ikke impliserer u;1, men negasjonen av u;1. Også i dette tilfellet virker det svært rimelig å hevde at p ikke har noen mulighet for å forhindre at Neg(u;1) intreffer ved noe tidspunkt som kommer etter t'. Det står derfor heller ikke i p's makt, relativt til t, å realisere det forhold som utsagnet u;1 beskriver. I begge tilfelle ser man at det ikke kan være slik at både u;1 og negasjonen av u;1, beskriver forhold som det står i p's makt å realisere relativt til t.

Disse overveielsene skulle tydelig vise at setningen C1 er temmelig rimelig. Man kan forøvrig legge merke til at vi i resonnementet ovenfor ikke forutsetter noe om avstanden mellom tidspunktet t' og tidspunktet t. t' kan like gjerne komme en milliontedels sekund før t som en million år før t. Argumentet vil være det samme uansett.

Vi skal betrakte en del varianter av setningen C1 som kan sette den inn i en litt videre sammenheng, og som det også for sin egen skyld er av interesse å betrakte i forbindelse med C1. Først ser vi på en påstand som er noe sterkere enn C1, nemlig den setningen man får når man i antesedenten til C1 fjerner den andre konjunkten. La oss kalle denne nye setningen for C1.1:

(C1.1) M;t(u,x,w) .->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')})))]

Det er mulig at denne setningen er for sterk. For antar vi at det finnes t', s og D som er slik at t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')})))
vil det være to muligheter: LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')})) kan være tilfelle. I såfall vil det være rimelig å slutte at ¬M;t(u,x,w), slik som i resonnementet ovenfor. Men om LKm(u,UN(D,{l(s,t')}) er tilfelle virker det mer tvilsomt å hevde at ¬M;t(u,x,w). Man kan i dette tilfelle si at u vil bli realisert uansett hva x gjør etter tidspunktet t' og at *dette* forhold gjør det berettiget å si at det ikke i noen ekte betydning av ordet "makt" står i x's makt å realisere u relativt til tidspunktet t. Det kan kanskje sies noe til fordel for en slik tankegang, men det kan også sikkert fremføres argumenter mot den. Vi lar derfor spørsmålet stå åpent.

I forbindelse med (C1.1) kan man derfor undres på om det er nødvendig å ta med begge disjunktene som forekommer inne i konsekventen, mao. om man istedet for (C1.1) snarere skulle betrakte:

(C1.2) M;t(u,x,w) .->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
& LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')}))]

Det skulle være klart at (C1.2) er implisert av (C1.1). Og nettopp fordi den problematiske muligheten som vi betraktet ovenfor ikke kommer inn i bildet ved (C1.2) virker denne setningen mer plausibel. Et spørsmål man kan stille er om (C1.2), eller for å være mer nøyaktig, lukningen av (C1.2), impliserer (C1). Dette er faktisk tilfelle og beviset er egentlig temmelig enkelt. La oss oppføre dette som en egen sats og gi et bevis:

TEOREM 14.1.1 : *Lukningen av (C1.2) impliserer (C1)*

Bevis: Anta lukningen av (C1.2) holder. Anta for reduktio ad absurdum at antesedenten i (C1) holder, men at konsekventen ikke holder, mao. anta at (1) og (2) nedenfor holder:

(1) M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w)

(2) (Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')})))

Fra (2) følger det selvfølgelig at det må finnes t',s og D hvor vi har:

(3) t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')}))

I lys av den siste konjunkten i (3) kan vi sondre mellom to tilfelle:

(i) LKm(u,UN(D,{l(s,t')}) . I så tilfelle følger sammen med de tre første konjunktene i (3) og formelen (1) at vi har:

(4) M;t(Neg(u),x,w) & (Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & D≠ø &
& (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & (LKm(Neg(Neg(u)),UN(D,{l(s,t')})) siden Neg(Neg(u))=u. Men dette strider åpenbart mot (C1.2). I det andre tilfelle har vi at LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')})) Men også dette, (1) og de tre første konjunktene i (3) står åpenbart i strid med (C1.2). I begge tilfellene kan vi altså utlede en motsigelse. Det følger at (C1) må holde om (C1.2) gjør det. **Q.E.D.**

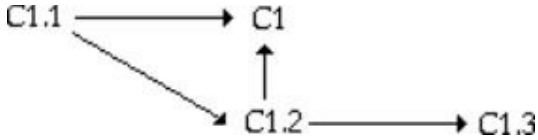
Tilslutt nevner vi at det også finnes en svakere versjon av formelen (C1.2) som det også kan ha en viss interesse å ta i betraktning. For å formulere denne definerer vi først relasjonen Ah;w(u,x,t) på den følgende måte:

(1) Ah;w(u,x,t) <-> M;t(u,x,w)
&¬(Eu')(u'êU &s(u')≠ø & s(u') Inkl s(u) & M;t(u',x,w))

Vi minner om at denne relasjonen ble definert i §13. Det denne definisjonen sier er at A;t(u,x,w) holder hvis og bare hvis utsagnet u beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w og det dessuten er slik at det ikke finnes noe sterkere konsistent utsagn u' som beskriver noe det står i x's makt å realisere relativt til t i verdenen w. I stedet for (C1.2) kunne man nå betrakte:

(C1.3) Ah;w(u,x,t) .->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
& LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')}))]

Det skulle være ganske opplagt at (C1.3) er implisert av (C1.2). La oss til slutt sammenfatte implikasjonsforholdene mellom de setningene vi har studert her i det følgende diagram:



§14.2 Setningen C2

Den følgende betingelse er sterkere en betingelsen C1 som ble introdusert ovenfor:

(C2) (M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w)).->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})})) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))]

I forbindelse med denne setningen minner vi om at uttrykket "FH(w,t)" ble definert i §11. FH(w,t) er det utsagnet som er sant i nøyaktig de verdener som er historisk identiske med verdenen w opp til og inkludert tidspunktet t. Dette innebærer at FH(w,t) er ekvivalent med

snittet av alle utsagnene l(Hist(w)(t'),t') der t'≤t.[16]. I lys av dette er det naturlig å foreslå følgende lesemåte av uttrykket "FH(w,t)", nemlig: "Det utsagnet som gir en fullstendig beskrivelse av hendelsesforløpet i verdenen w opp til og inkludert tidspunktet t". Intuitivt virker (C2) temmelig rimelig. For anta det finnes et tidspunkt t', en tilstand s og et sett med kausallover D slik at det følgende holder:

t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})}) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')}))

Da vil det altså være slik at kausalovene i mengden D sammen med det utsagnet som beskriver hendelsesforløpet i verdenen w opp til og inkludert tidspunktet t' impliserer enten u eller negasjonen av utsagnet u. I det første tilfelle synes det da utelukket at en person x kan forhindre at u inntreffer ved noe tidspunkt som kommer etter t'. I så fall kan x ikke forhindre ved tidspunktet t at u inntreffer. Men dette synes å innebære at det ikke relativt til tidspunktet t står i x's makt å sørge for at negasjonen av u realiseres. Dette strider åpenbart mot den andre konjunkten i antesedenten i C2. På tilsvarende vis om vi antar at kausallovene i D og utsagnet FH(w,t') impliserer negasjonen av u. Da blir det vanskelig å skjønne hvordan det kan stå i x's makt å realisere u. I dette tilfelle får man da en konflikt med den første konjunkten i antesedenten i C2. I begge tilfelle får man intuitivt en motsigelse. Ved nærmere ettertanke synes derfor C2 å ha en forholdsvis stor grad av plausibilitet.

Vi skal nå gi et bevis for at C2 impliserer C1. La oss formulere dette som et formelt teorem:

TEOREM 14.2.1: *Betingelsen C2 impliserer betingelsen C1.*

Bevis: La oss gi et bevis for at C1 er implisert av C2. Anta C2 holder. Da har vi

(1) (M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w)).->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})}) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))]

Vi skal da vise at :

(2) (M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w)).->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')})))]

Anta derfor (3) M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w). Fra (3) og (1) følger:

(4) ¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})}) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))

Anta nå mot for modning at vi har:

(5) (Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø
(LKm(u,UN(D,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')})))

Da følger at det finnes t',s, D der:

(6) t'<t&TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{l(s,t')}))

Vi har per definisjon for alle w og t at:

(7) FH(w,t) = s;-1(Mg(w': w'êI & Ekv(q(t),w',w))) der q(t) = Mg(t':t'êT & t'≤t) .

Det vil åpenbart være tilstrekkelig å bevise:

(+) (LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})}) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')}))

Man skulle nå kunne se at det vil være nok å bevise at utsagnet UN(D,{FH(w,t')})} impliserer utsagnet UN(D,{l(s,t')}). Det vil da i sin tur være nok å vise at FH(w,t') impliserer l(s,t'). Anta derfor for vilkårlig w' at w'ês(FH(w,t')). Da følger ved hjelp av (7) Ekv(Mg(t : têT & t≤t'),w',w). Ved hjelp av de definisjoner vi tidligere har gitt slutter vi fra dette (8) Tot(w',t') = Tot(w,t'). Nå har vi per definisjon at l(s,t') = s;-1(Mg(w: TL(s,w,t'))). Fra (6) ovenfor følger: TL(s,w,t'). Dette innebærer at s=Tot(t',w) og derfor i lys av (8) at s= Tot(t',w'). Fra

[16] Det er en bra øvelse for leseren å gi bevis for dette.

definisjonen av Tot og våre definisjoner følger da: TL(s,w',t'). Dette i sin tur innebærer at w'ês(l(s,t')). Vi har dermed vist at FH(w,t') impliserer l(s,t'). Dette avslutter vårt bevis. **Q.E.D.**

La oss som avslutning på denne paragrafen nevne at man også i forbindelse med C2 kan betrakte en rekke varianter, på samme måte som vi gjorde det i for-bindelse med C1. Fjerner vi den andre konjunkten i antesedenten til C2 får vi den følgende formel:

C2.1 M;t(u,x,w) ->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))]

Av samme grunner som man kan ha en mistanke om at C1.1 er for sterk, kan man ha en mistanke om at C2.1 er for sterk. Man ser at C2.1 åpenbart impliserer C2. Fjerner man nå den første disjunkten inne i konsekventen i C2.1 får man en formel som står i samme forhold til C2 som C1.2 står i til C1:

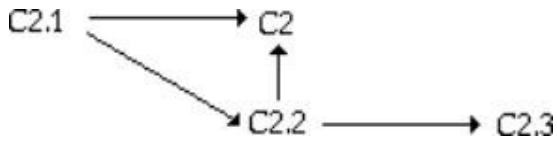
C2.2 M;t(u,x,w).->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))]

Denne formelen er sterkere enn C2, man kan vise dette på samme måte som man viste at C1.2 impliserte C1, men den er svakere enn C2.1.

Endelig kan man betrakte den formelen som man får når man erstatter antesedenten i C2.2 med "Ah;w(u,x,t)":

C2.3 Ah;w(u,x,t).->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))]

Det følgende diagram sammenfatter implikasjonsforholdene mellom de setningene som har blitt betraktet i denne paragrafen:



§14.3 Setningen C3

Vi skal formulere to andre setninger i L(DF) som er relatert til (C1) og (C2). Den første setningen er denne:

(C3) uêU &M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w). ->.
¬(Eh)(Et')(Hfør(h,t',w)&t'<t &(EΔ)(Δ Inkl U & (Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) &
Δ≠ø& [uêk(ΔU{ß(h)}) v Neg(u)êk(ΔU{ß(h)})]))

Det denne setningen sier er at dersom u, såvel som Neg(u), er utsagn som beskriver forhold som det står i individet x´s makt å realisere relativt til tidspunktet t, så kan det ikke finnes noen hendelse i begrenset forstand h som foreligger realisert før tidspunktet t i w, og noen mengde med kausallover Δ som alle er sanne i w, slik at teorien Δ utvidet med ß(h) enten impliserer u eller negasjonen av u. Man erindrer at om h er en hendelse så er ß(h) det

utsagnet som beskriver h. I denne forbindelse bør man konsultere §11. Vi omtaler bare denne setningen fordi den er nærliggende å sammenligne med de andre setningene av lignende type som vi allerede har betraktet, men også fordi den kan sammenlignes med de setningene som vi skal komme til å betrakte, nemlig C4 og C5. Det bør bemerkes at C3 er svakere enn C2 og usammenlignbar i styrke med C1. Dette skal vi gi bevis for i den neste paragrafen. Hvis man derfor aksepterer C2, f. eks. med den begrunnelse vi har gitt ovenfor i §14.2 bør man også akseptere C3.

§14.4 Setningen C4

For å kunne formulere den setningen som vi nå har i tankene, C4, er det først nødvendig å innføre en definisjon. Anta x er et utsagn og at t er et tidspunkt. Vi skal da si per definisjon at x beskriver et hendelsesforløp som kommer før tidspunktet t hvis og bare hvis vi har:

(1) (Aw)(wês(x).->.(Aw')(Hist(w);t =Hist(w');t.->. w'ês(x)))

La oss si noen ord om hvorfor det er rimelig å si at et utsagn x som oppfyller betingelsen (1) kan sies å beskrive et hendelsesforløp eller forhold som foreligger før tidspunktet t. Man husker fra §4 at Hist(w);t er historien til verdenen w begrenset til mengden av alle de tidspunkter som kommer før tidspunktet t. Er w og w' to mulige verdener der Hist(w);t=Hist(w');t innebærer dette at de to verdnene historisk sett er identiske for alle tidspunkter som kommer før tidspunktet t.[17] Men historisk sett kan de avvike etter tidspunktet t. Hvis vi nå tenker oss et utsagn x som er sant i verdenen w, men som beskriver et forhold som foreligger realisert ved tidspunktet t eller et tidspunkt som kommer etter t, synes det ikke rimelig å tro at enhver verden w' som er historisk sett identisk med w ved alle tidspunkter før t nødvendigvis er forenelig med x. Derimot virker dette rimelig om man tenker seg at utsagnet beskriver et hendelsesforløp som kommer før tidspunktet t. Av denne grunn virker definisjonen ovenfor rimelig.

Setningen som nå skal betraktes er denne:

(C4) M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w). ->. ¬(Ex)(xêU& True(w,x)&
(Aw)(wês(x).->.(Aw')(Hist(w);t =Hist(w');t.->. w'ês(x))) &
(EΔ)(Δ Inkl U & Δ≠ø &(Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) &
[uêk(ΔU{x}) v Neg(u)êk(ΔU{x})]))

Man kan formulere innholdet i denne setningen på forskjellige måter. La oss si at et utsagn u;1 kausalt sett impliserer et annet utsagn u;2 i verdenen w hvis og bare hvis (a) det finnes en ikke-tom mengde med kausallover Δ hvor alle kausallovene gjelder i verdenen w og (b) utsagnet u;2 er logisk sett implisert av utsagnene i ΔU{u;1}. Innføres denne terminologi utrykker (C4) den følgende påstand: Hvis u og Neg(u) er utsagn som beskriver forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t kan det ikke finnes noe utsagn som beskriver et hendelsesforløp som kommer før tidspunktet t og som i tillegg kausalt sett enten impliserer u eller negasjonen av u. I likhet med C1 og C2 virker heller ikke C4 direkte uplausibel: For hvis man virkelig antar at x er et utsagn som beskriver et faktisk forhold som inntreffer før tidspunktet t i verdenen w, og man i tillegg antar at dette utsagn sammen med visse kausallover impliserer utsagnet u, er det vanskelig å se hvordan noen kan forhindre at u inntreffer i verdenen w. Det blir da tilsvarende vanskelig å se hvordan det, relativt til tidspunktet t, kan stå i ens makt å realisere negasjonen av u. Tilsvarende synes saken å stille seg om man antar at utsagnet x kausalt sett impliserer negasjonen av u. I dette tilfelle synes det også eiendommelig å hevde at det kan stå i ens makt å sørge for at u blir realisert relativt

[17] Men det behøver ikke å være tilfelle at den samme totaltilstand foreligger realisert i begge verdener ved tidspunktet t.

til tidspunktet t. I lys av slike overveielser synes det ikke uberettiget å si at C4 kan fremstå som temmelig rimelig.

Det skulle være unødvendig å nevne at vi ikke skal forsøke å utlede denne setning fra andre setninger som er mer innlysende innenfor den språkrammen som vi her arbeider med. Det er tvilsom om dette lar seg gjøre. Det man i høyden kan gjøre er eventuelt å klargjøre innholdet og konsekvensene til (C4) innenfor vår ramme. Det første man da kan peke på er at (C4) faktisk impliserer betingelsen (C2) som vi betraktet tidligere. Derimot er det neppe slik at (C2) impliserer (C4).[18]

TEOREM 14.4.1: *Anta (Af)(fêExp(Q,T).->. (Ew)(wêI & Hist(w)=f)). La Ci* betegne lukningen av Ci for i=1,...,4. Da gjelder:*

C4 -> C2* -> C1* og C2*-> C3**

Fra dette teoremet fremgår det at C4 er en sterkere betingelse en C2 og det fremgår at C2 er sterkere enn C3. Vi kan derimot ikke vise at C1 impliserer C3 eller omvendt. Disse synes derfor i styrkemessig henseende å være usammenlignbare.

Bevis: Vi har bevist deler av dette teoremet ovenfor. Det gjenstår imidlertid å bevise at C4* impliserer C2*, og at C2* impliserer C3*.

(a) Vi viser først at C2 impliserer C3. Anta at C2 holder. Dette innebærer at:

(1a) (M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w)).->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))]

Vi må vise at C3 holder, dvs. vi må vise følgende:

(2a) uêU &M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w). ->.
¬(Eh)(Et')(Hfør(h,t',w)&t'<t &(EΔ)(Δ Inkl U & Δ≠ø
(Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) & [uêk(ΔU{ß(h)}) v Neg(u)êk(ΔU{ß(h)})]))

Vi skal imidlertid først vise at den følgende påstand holder generelt for alle h,w og t:

(A) Anta HFør(h,w,t). Da har vi at FH(w,t) impliserer ß(h).

Dette vises på den følgende måte: I følge definisjonen av operasjonen ß har vi:

(1) ß(h) = s;-1(Mg(w: wêI & (At)(têDom(h).->.
[(if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t)]êh(t)))

Ifølge definisjonen av operasjonen FH har vi:

(2) FH(w,t) = s;-1(Mg(w': w'êI & Ekv(q(t),w',w))) der q(t) = Mg(t':t'êT & t'≤t)

Anta w'êFH(w,t). Da følger ved hjelp av (2) at w'êI & Ekv(q(t),w',w). La g være historien til w' ie. sett (3) g=Hist(w'). Siden HFør(h,w,t) følger :

(4) (At')(t'êDom(h).->.t'<t) Fra (3) følger at (5) g=(if)(fêExp(Q,T)&w'êG(f)) Dette innebærer at det vil være tilstrekkelig å bevise:

(6) (At)(têDom(h).->. [g(t)]êh(t))

Fra det at HFør(h,w,t) følger også

(7) (At)(têDom(h).->.[(if)(fêExp(Q,T)&wêG(f))(t)]êh(t))

Nå har vi (8) Hist(w) =(if)(fêExp(Q,T)&wêG(f) Fra (2) ovenfor følger:

(At')(t'≤t.->.Hist(w')(t')=Hist(w)(t')) Fra dette og (4) kan vi slutte:

(9) (At')(t'êDom(h).->.Hist(w')(t')=Hist(w)(t'))

Fra (7) og (8) følger (At)(têDom(h).->.[Hist(w)(t)]êh(t)) Men fra dette og (9) utleder vi: (At)(têDom(h).->.[Hist(w')(t)]êh(t)). Nå hadde vi imidlertid at g=Hist(w'). Det følger derfor at

---

18 Dette har vi ikke bevist. Et eventuelt detaljert og formelt sett korrekt bevis vil sikkert også bli temmelig langt.

(6) ovenfor holder. Det følger at w'êß(h). Vi har dermed bevist at FH(w,t) impliserer ß(h). Dermed skulle vi ha godtgjort påstand (A).

Anta nå at (10) uêU &M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w). Fra dette og (1a) følger:

(11) ¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø &
(LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))]

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes h,t'og Δ slik at:

(12) Hfør(h,t',w)&t'<t &Δ Inkl U & Δ≠ø &
(Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) & [uêk(ΔU{ß(h)}) v Neg(u)êk(ΔU{ß(h)})])

Fra den første konjunkten i (12) og setning (A) følger som vi beviste ovenfor at FH(w,t') impliserer ß(h). Men fra dette og den siste konjunkten i (12) følger :

(13) (LKm(u,UN(Δ,{FH(w,t')})) v LKm(Neg(u),UN(Δ,{FH(w,t')}))

Fra den andre,tredje og fjerde konjunkten i (12) har vi:

(14) t'<t &Δ Inkl U & (Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) Siden t'êT må det åpenbart finnes en sêQ der vi har (15) TL(s,w,t'). Man ser imidlertid nå at (13), (14) og (15) er uforenelig med (11). Dette gir oss den motsigelse vi ønsker.

(b) Vi viser at betingelsen C4 impliserer C2. Anta C4 holder ie. :

(1) uêU &M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w). ->. ¬(Ex)(xêU&
(Aw)(wês(x).->.(Aw')(Hist(w);t =Hist(w');t.->. w'ês(x))) &
(EΔ)(Δ Inkl U & (Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) &Δ≠ø&
[uêk(ΔU{x}) v Neg(u)êk(ΔU{x})]))

Vi må da vise:

(2) (M;t(u,x,w) &M;t(Neg(u),x,w)).->.
¬[(Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø
(LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))]

Det vil være tilstrekkelig å bevise at FH(w,t') om t,t'êT og t'<t oppfyller betingelsen:

(+) xêU&(Aw)(wês(x).->.(Aw')(Hist(w);t =Hist(w');t.->. w'ês(x)))&True(w,x)

Det skulle være opplagt at FH(w,t') er et utsagn og at wês(FH(w,t')). Dette følger direkte fra definisjonen av operasjonen FH.

Anta nå for vilkårlig w',w",t' og t at:

(3) t,t'êT & t'<t &w'ês(FH(w,t')) & Hist(w');t =Hist(w");t

Vi ønsker å vise at w"ês(FH(w,t')). Fra definisjonen av "Hist(w);t", nemlig Hist(w);t = Rest(Hist(w), Mg(t': Tp(t')&t' <t)), og den siste konjunkten i (3) har vi: (At") (t"<t.->. Hist(w')(t")=Hist(w")(t")). Dette innebærer at de to verdenene w' og w" er historisk sett ekvivalente opp til tidspunktet t. Siden t'≤t følger derfor at: (4) (At")(t"≤t'.->. Hist(w') (t")=Hist(w")(t")). I lys av definisjonen av "FH(w,t)" nemlig:

FH(w,t) = s;-1(Mg(w': w'êI & Ekv(q(t),w',w)))

der q(t) = Mg(t':t'êT & t'≤t) og det faktum at w'êFH(w,t') følger:

(5) (At")(t"≤t'.->. Hist(w')(t")=Hist(w)(t")) Fra dette og (4) kan man slutte: (6) (At") (t"≤t'.->. Hist(w")(t")=Hist(w)(t")). Men fra dette og definisjonen av relasjonen Ekv har vi Ekv(q(t'),w",w). Dette og definisjonen av FH(w,t') impliserer w"ês(FH(w,t')). som nettopp er det vi ønsker. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Vi skal betrakte visse varianter av C4 på samme måte som vi gjorde i forbindelse med C1 og C2. Fjerner man den andre konjunkten i antesedenten i C4 får man:

C4.1 M;t(u,x,w) . ->. ¬(Ex)(xêU& True(w,x)&
(Aw)(wês(x).->.(Aw')(Hist(w);t =Hist(w');t.->. w'ês(x))) &(EΔ)(Δ Inkl U &
(Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) & Δ≠ø& [uêk(ΔU{x}) v Neg(u)êk(ΔU{x})]))

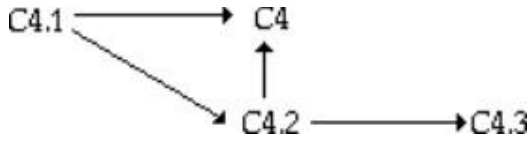
C4.1 impliserer som man ser C4 og av delvis samme grunner som vi gjorde rede for i forbindelse med C1.1 kan man stille seg noe tvilende til denne formelen. Fjerner man videre uttrykket "uêk(ΔU{x})" fra konsekventen i C4.1 får man:

C4.2 M;t(u,x,w) . ->. ¬(Ex)(xêU& True(w,x)&
(Aw)(wês(x).->.(Aw')(Hist(w);t =Hist(w');t.->. w'ês(x))) &(EΔ)(Δ Inkl U &
Δ≠ø & (Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) & Neg(u)êk(ΔU{x})))

Endelig kan man studere den formelen som fremkommer når man erstatter antesedenten i C4.2 med "Ah;w(u,x,t)":

C4.3 Ah;w(u,x,t) . ->. ¬(Ex)(xêU& True(w,x)&
(Aw)(wês(x).->.(Aw')(Hist(w);t =Hist(w');t.->. w'ês(x))) &(EΔ)(Δ Inkl U &
Δ≠ø & (Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) & Neg(u)êk(ΔU{x})))

Implikasjonsforholdene mellom C4 og C4.1 - C4.3 er som på den følgende figur:



§14.5 Setningen C5

I forbindelse med betingelsene C1 - C4 som vi har betraktet ovenfor kunne det også ha en viss interesse å se litt nærmere på den følgende formel som kan sammenlignes med dem:

(#) M;t(u,x,w)&M;t(Neg(u),x,w).->.¬(Ey)(ED)(yêU&True(w,y) &
Cons({u,y}) & Cons({Neg(u),y}) & (Ax)(xêD->.CLov(x,w)) &
D≠ø & (uêk(DU{y}) v Neg(u)êk(DU{y}))).[19]

Det er ikke helt lett å avgjøre om (#) er sann eller usann. Vi har verken gitt noe bevis for eller mot denne formelen og ønsker ikke å ta noe definitivt stilling til denne tesen. Imidlertid skal vi nå se på et argument mot den. La oss først definere uttrykket "Utsagnet u;1 impliserer kausalt utsagnet u;2", i symboler "ImpC(u;1,u;2)" ved:

DEFINISJON 14.5.1: ImpC(u;1,u;2) <-> u;1êU&u;2êU&(ED)(DêPt(U) & D≠ø &
(Ax)(Aw)(wês(u;1) & xêD.->.CLov(x,w)) & u;2êk(DU{u;1}))

Det synes ikke helt urimelig å hevde at hvis u beskriver et mulig forhold som det står i x´s makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w og u;2 er et utsagn som er kausalt implisert av u så er også u;2 et utsagn som beskriver et mulig forhold som det står i x´s makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w. Formalisert kan dette uttrykkes slik:

(I) M;t(u,x,w) & ImpC(u,u;2).->. M;t(u;2,x,w).

---

[19] La oss i forbindelse med denne setningen gjøre oppmerksom på at hvis Δ er en utsagnsmengde så betyr "Cons(Δ)" at utsagnsmengden Δ er konsistent. Dette i sin tur innebærer at det finnes en mulig verden hvor alle utsagnene i Δ er sanne.

La oss betegne den universelle lukning av (#) med "(#*)". Vi betrakter den følgende åpne setning:

M;t(u,x,w) & ImpC(u,u;2) & True(w,u) &¬(u;2êk({u}) v Neg(u;2)êk({u}))

Det virker svært rimelig å tro at det skulle finnes t,u,u;2 og x slik at denne setning er oppfylt for en eller annen mulig verden w. Men hvis vi antar dette og at lukningen av (I) holder kan man vise at (#*) er usann. Vi har med andre ord at:

TEOREM 14.5.1: *Anta M;t(u,x,w) & ImpC(u,u;2) & True(w,u) &¬(u;2êk({u}) v Neg(u;2)êk({u})) & M;t(Neg(u;2),x,w) og dessuten at den universelle lukningen av formelen (I) holder. Da har vi ¬(#*).*

Bevis: Fra den første forutsetningen i teoremet har vi at :
(1) M;t(u,x,w) & ImpC(u,u;2) & True(w,u) & ¬(u;2êk({u}) v Neg(u;2)êk({u}))
Fra dette og prinsippet (I) følger: (2) M;t(u;2,x,w) Fra (2) og forutsetningen i satsen følger : (3) M;t(u;2,x,w)& M;t(Neg(u;2),x,w). Videre har vi fra den andre konjunkten i (1) og definisjonen av relasjonen ImpC at

(4) DêPt(U) & (Ax)(Aw)(wês(u) & xêD.->.CLov(x,w)) &
u;2êk(DU{u}) & D≠ø

for noe D. Siden True(w,u) følger wês(u). Dette og (4) innebærer at vi har:
(5) (Ax)(xêD.->.CLov(x,w)) Fra den fjerde konjunkten i (1) følger (6): Cons({u,u;2}) & Cons({u,Neg(u;2)}) Fra den siste konjunkten i (4) følger (7) u;2êk(DU{u}) v Neg(u;2)êk(DU{u}) Fra (1), (5), (6) og (7) kan vi imidlertid konkludere med at:
(8) (Ey)(ED)(yêU&True(w,y) & Cons({u;2,y}) & Cons({Neg(u;2),y}) & D≠ø&
(Ax)(xêD->.CLov(x,w)) & (u;2êk(DU{y}) v Neg(u;2)êk(DU{y})))
Dette og (3) impliserer imidlertid åpenbart ¬(#*). **Q.E.D.**

La oss nå studere den følgende setning som har en viss likhet med (#). Som man ser er (C5) rett nedenfor ekvivalent med den setningen som fremkommer når man fjerner den andre konjunkten i antesedenten i (#) og dessuten fjerner uttrykket "uêk(DU{y})" i konsekventen.

(C5) Ah;w(u,x,t) -> ¬(Ey)(yêU & Cons({y,u}) & wês(y)
& Cons({y,Neg(u)}) & CImp;w(y,Neg(u)))

I forbindelse med denne setningen bemerker vi at relasjonen CImp er definert ved:

CImp;w(u,u') <-> C(u,u')êk(Mg(x: CLov(x,w)))

Uttrykket "CImp;w(u,u')" leses "Utsagnet u impliserer kausalt utsagnet u' i verdenen w". Vi bemerker at denne definisjonen av kausal implikasjon er ekvivalent med:

CImp;w(u,u') <-> (ED)(ø≠DêPt(U) & (Ax)(xêD-> CLov(x,w)) & u'êk(DU{u}))

De følgende bemerkninger kan være på sin plass i forbindelse med (C5): Antesedenten i denne setningen uttrykker at utsagnet u beskriver et handlings-alternativ som er åpent for personen x relativt til tidspunktet t i verdenen w. Konsekventen i setningen uttrykker, som man ser, at det *ikke finnes noe* utsagn y som oppfyller de følgende krav: (i) utsagnet y er sant i verdenen w. (ii) utsagnet y impliserer logisk sett hverken utsagnet u eller negasjonen av utsagnet u. (iii) utsagnet y impliserer kausalt sett utsagnet Neg(u). Man kan sikkert diskutere hvorvidt (C5) er riktig eller ikke. I våre øyne virker det temmelig plausibelt. Hvis u beskriver fullstendig et handlingsalternativ som står åpent for en person ved et gitt tidspunkt t kan det ikke finnes noe sant utsagn som logisk sett hverken impliserer u eller negajonen av u, men som kausalt sett impliserer negasjonen av u. For i motsatt fall vil ikke u beskrive noe

virkelig handlingsalternativ som står åpent for en. (C5) gir så og si uttrykk for hva man legger i begrepet handlingsalternativ. Hvis man benekter (C5) og snakker om handlingsalternativer, taler man om noe annet enn det vi mener med "handlingsalternativ". Vel. Det er ikke avjørende om man aksepterer dette eller ikke. Vi tar hovedsakelig for oss (C5) her fordi det er interessant å og sammen-ligne den med de andre C-setningene og fordi vi også er interessert i å undersøke konsekvensene til setningen.

En annen grunn man kan ha til å betrakte (C5) er at det argumentet som ble fremført mot (#) ovenfor ikke synes å ramme denne setningen, ie. (C5) på samme måte. Antar vi at forutsetningene i teoremet ovenfor holder kan vi ikke utlede negasjonen av lukningen av (C5). La oss se litt på hvorfor det resonnement som ble gitt som bevis for teoremet ovenfor ikke lenger lar seg gjennomføre om vi erstatter (#) med (C5). Anta at forutsetningene i teoremet holder. Da kan resonnementet i teoremet gjennomføres helt frem til formel (8). Men det skulle være klart at konjunksjonen av (3) og (8) på ingen måte motsier (C5).

Hvordan er C5 relatert til de forskjellige variantene av C4 som vi betraktet i forrige paragraf? Man kan vise at C5 impliserer C4.3 om man legger til en premiss. La oss først gjøre det klart at vi skal bruke "Før(x,t)" som forkortelse for det lengere uttrykket "(Aw)(wês(x).->.(Aw')(Hist(w);t =Hist(w');t.->. w'ês(x)))" som inngår i C4. "Før(x,t)" innebærer altså at x er et utsagn som beskriver et forhold som inntreffer før tidspunktet t. Den tilleggspremissen som vi har i tankene er den følgende:

(K) Ah;w(u,x,t) & Før(y,t) –> Cons({u,y}) & Cons({Neg(u),y})

Denne setningen uttrykker at dersom u er et utsagn som beskriver et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t, og y er et utsagn som beskriver et forhold som inntreffer før tidspunktet t, så er utsagnet y konsistent med såvel u som negasjonen av u. Dette virker rimelig, intuitivt bedømt, fordi (a) et utsagn som beskriver et handlingsalternativ som står åpent ved tidspunktet t givetvis vil beskrive et hendelsesforløp som eventuelt inntreffer etter tidspunktet t og fordi (b) man ikke fra utsagn som beskriver fortidige hendelser ved ren logikk kan slutte noe om riktigheten til utsagn som beskriver fremtidige hendelser.

Den satsen vi kan vise er:

TEOREM 14.5.2 *C5 & K –> C4.3*

Bevis: Anta C5 og K holder. Anta for reduktio ad absurdum at C4.3 ikke holder. Fra det siste og definisjonen av "C4.3" følger at det finnes u der:

(1) Ah;w(u,x,t) og der vi har:

(2) (Ex)(xêU& True(w,x)& Før(x,t)
&(EΔ)(ø≠ Δ Inkl U &(Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) & Neg(u)êk(ΔU{x})))

Fra (2) følger åpenbart eksistensen av x og Δ der:

(3) True(w,x)& Før(x,t)

(4) ø≠Δ Inkl U &(Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) & Neg(u)êk(ΔU{x}))

Fra (4) følger (5) CImp;w(x,Neg(u)). Fra (1), (3) og K følger videre:

(6) Cons({u,x}) & Cons({Neg(u),x})

I lys av (3), (5) og (6) har vi:

(6) (Ey)(yêU & Cons({y,u}) & wês(y)
& Cons({y,Neg(u)}) & CImp;w(y,Neg(u)))

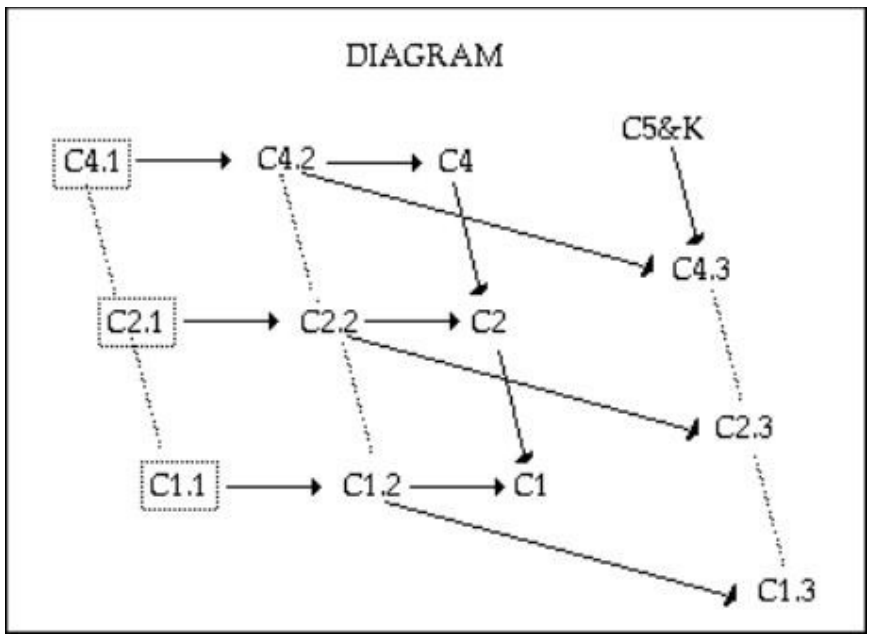
Men dette og (1) strider åpenbart mot C5. **Q.E.D.**

La oss på dette punkt foreta en oppsummering av de viktigste resultatene som vi har kommet frem til. Vi har i denne delen betraktet og formulert fem temmelig viktige setninger i språket til teorien DF. Det dreier seg om setningene C1 - C5, samt visse varianter av dem. Vi har delvis avklart implikasjons-forholdene mellom disse setningene i det vi har vist at C4

impliserer C2 som i sin tur impliserer C1. Videre har vi sett at C2 også impliserer C3. C3 synes imidlertid å være usammenlignbar med C1 når det gjelder styrke. Som nevnt har vi også sett på visse varianter av disse setningene. Dette gjelder C1, C2 og C4.
I forbindelse med C1 betraktet vi C1.1, C1.2 og C1.3. Når det gjaldt denne familien med setninger fant vi at C1.1 impliserte C1.2 som i sin tur impliserte C1. Videre fant vi at C1.2 åpenbart hadde C1.3 som konsekvens. Derimot var C1.3 usammenlignbar med C1

På tilsvarende vis betraktet vi setningene C2.1, C2.2 og C2.3 i forbindelse med C2. Implikasjonsforholdene var i denne forbindelse helt tilsvarende: C2.1 impliserer C2.2 som så impliserer C2 og C2.3. C2 kan sannsynligvis ikke utledes fra C2 eller omvendt.

Helt tilsvarende implikasjonsforhold gjaldt mellom setningene i familien C4, C4.1, C4.2 og C4.3. Endelig undersøkte vi betingelsen C5 og fant at denne sammen med premissen K impliserte C4.3. De implikasjonsforholdene vi nå har omtalt er fremstilt i det følgende diagram. Når det gjeldet implikasjonene
C4.3 –> C2.3 –> C1.3, videre C4.2 –> C2.2 –> C1.2 og C4.1 –> C2.1 –> C1.1 har vi ikke gitt detaljert bevis for dem. Men bevisene for disse påstandene er analoge med det som ble ført for C4 –> C2 –> C1 i §14.4.



§15 Om inkompatibilitet mellom determinisme og frihet. Ni teser.

I denne paragrafen skal vi gjøre rede for våre hovedresultater angående den logiske forenelighet mellom frihet og determinisme. I alt skal vi gi bevis for ni satser av relevans for dette spørsmål og i forbindelse med diskusjonen av dem angi en rekke korollarer. Det er disse teoremene som utgjør kjernen, hovedtesen, i dette arbeid.

La oss starte med den første av disse satsene.

Først bemerker vi vi at en verden w kalles for *strengt deterministisk* hvis og bare hvis det finnes en strengt deterministisk teori hvor alle utsagnene i teorien er sanne i w. Vi skal vise innenfor rammen av teorien DF at (C1), visse tilleggspremisser, og den følgende påstand, nemlig at w er en strengt deterministisk verden, impliserer negasjonen av den påstand at det finnes en person som ved et eller annet tidspunkt kan velge fritt i verdenen w, ie. (Ex) (Et)Fri(x,t,w) . La oss imidlertid aller først bemerke at "Deter(w)" brukes som forkortelse

for uttrykket "w er en deterministisk verden". Vi tillater oss å formalisere denne definisjonen, og gjør dette slik:

DEFINISJON 15.1:
(a) Deter(w) <-> (EX)(SDet(X) & (Ax)(xêX.->.True(w,x)))

Gitt denne definisjonen kan vår første sats om uforeneligheten mellom frihet og determinisme formuleres slik:

TEOREM 15.1 *(Inkompatibilitet 1) Anta at hypotesen C1 holder for alle u,x, w og t. Forutsett at wêI og at w har en historie. Anta videre at Deter(w) og at (Aw)(wêI.->. Ca(Mg(w' : w'~w))=1), mao. at Mg(w' : w'~w) bare inneholder et element. Anta videre at lukningen av den følgende formel holder:*

(+) M;t(u,x,w) &LK(u',u).->. M;t(u',x,w)

og at vi har: (°) (Ax)(Aw)(Aw')(CLov(x,w) & w~w'.->.CLov(x,w'))

Da gjelder den følgende påstand:

¬(Ex)(Et)(Fri(x,t,w)

Kommentar: Når det gjelder denne satsen har vi detaljert kommentert betingelsen C1 ovenfor. Videre har vi tidligere diskutert begrepet om strengt deterministisk teorier og relatert dette begrepet til våre andre determinisme-begreper. Det skulle derfor ikke være nødvendig med ytterligere kommentarer til forutsetningen "Deter(w)" i teormet. Når det gjelder forutsetningen (+) gjenkjenner man i denne aksiomet AT 4 som vi nevnte i §13. Dette aksiomet inngår i teorien HT. Det virker rimelig: Ethvert utsagn som er en logisk konsekvens av et utsagn som beskriver noe det står i ens makt å gjøre, må også selv beskrive noe det står i ens makt å få realisert. Videre gjenkjenner man i prinsippet (°) aksiomet CL2 som vi nevnte mot slutten av §3. Som man ser sier denne setningen at de samme kausallover gjelder i historisk identiske verdener. Også dette virker intuitivt bedømt temmelig plausibelt.

Det gjenstår derfor å komme med noen kommentarer til forutsetningen:

(*) (Aw)(wêI.->. Ca(Mg(w' : w'~w))=1)

Denne setningen uttrykker at dersom to verdener er historisk sett identiske, så er de faktisk også identiske. Denne forutsetningen i satsen er nødvendig fordi en strengt deterministisk teori i verdenen w ikke bestemmer w entydig, men bare entydig opp til historisk ekvivalens. Tenker man seg at Mg(w': w'~w) inneholder mer enn ett element ettersom w gjennomløper I vil ikke den siste delen av beviset nedenfor kunne gjennomføres. Imidlertid kan det bemerkes at vi ikke strengt tatt er avhengige av denne forutsetningen. I stedet for den kunne man bruke:

(**) M;t(u,x,w) –>(Aw)(Aw')(wês(u) & w~w'–> w'ês(u))

man kan vise at beviset for satsen lar seg gjennomføre med visse modifikasjoner om man benytter seg av denne forutsetningen i stedet for (*). Av disse forutsetningene er det nokså klart at (*) impliserer (**), mens det omvendte ikke holder. Ved å erstatte den første av disse setningene med den andre kan man altså skjerpe Teorem 15.1 noe.

La oss ytterligere se på noen sider ved Teorem 15.1. For det første bemerker vi at betingelsen C1 kan erstattes med en eller annen av de sterkere betingelsene som er anskueliggjort på oversikts-diagrammet vi ga helt til sist i forrige paragraf. Dette innebærer at vi kan erstatte C1 med f.eks. C2 eller C4. Mer interessant er det at man også kan erstatte formuleringen C1 med setningen C1.3. Men vi må da bruke endel av de prinsippene som inngår i teorien HT (som er en delteori av DF) for å få gjennomført beviset.

Det vi har nevnt her innebærer at alle setningene som ble nevnt eksplisitt på slutten av forrige paragraf og som impliserer C1 eller C1.3 kan erstatte C1 i teoremet uten at satsen derved opphører med å være bevisbar.

Endelig må vi nevne at om vi erstatter "Fri(x,t,w)" med "Fri;3(x,t,w)" eller "Fri;4(x,t,w)" fortsetter satsen å holde i lys av Teorem 13.4.2. Dette gjelder også om vi erstatter "Fri(x,t,w)" med "Fri;2(x,t,w)", men da må vi føye til prinsippet Q2 som en ekstra premiss i teoremet[20] .

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at forutsetningene i teoremet holder, men at man likevel har: (1) Fri(x,w,t) for noe x og t. Fra forutsetningen Deter(w) følger at det finnes en utsagnsmengde X hvor vi har :

(2) SDet(X) & (Ax)(xêX.->. True(w,x)).

Siden têT følger det fra de tidsteoretiske antagelsene i vår teori at det finnes tidspunkt t' som kommer før t, ie. det finnes t' der (3) t'êT & t'<t. Siden w har en historie følger at det finnes sêQ slik at (4) TL(s,w,t') Fra (1), definisjonen av "SDet(X)", forutsetningene i teoremet og et teorem vi tidligere har bevist følger:

(5) s(SN(UN(X,{l(s,t')}))) = Mg(w' : w' ~w)

Fra dette og forutsetningen om at (Aw)(wêI.->. Ca(Mg(w' : w'~w))=1) følger at det finnes w'êI slik at (6) s(SN(UN(X,{l(s,t)}))) = {w'}. Nå har vi fra (1) og vår definisjon av" Fri(x,t,w)" at det finnes utsagn u og u' slik at :

(6) s(u)Ωs(u')=ø & M;t(u,x,w)&M;t(u',x,w)

Siden de to utsagnene er uforenelige følger at u' impliserer Neg(u), ie at LK(Neg(u),u'). Fra dette, (6) og forutsetningen (+) i vårt teorem følger at:

(7) M;t(u,x,w)&M;t(Neg(u),x,w)

Vi har at w'êI. Det følger derfor at vi enten har w'ês(u) eller w'ês(Neg(u)). I det første tilfelle har vi LKm(u, UN(X,{l(s,t')})) . I det andre tilfelle har vi LKm(Neg(u), UN(X,{l(s,t')})) . I alle tilfelle må vi da ha:

(8) LKm(u, UN(X,{l(s,t')})).v.LKm(Neg(u), UN(X,{l(s,t')}))

Fra (2) følger det at wês(SN(X)) og derfor ved hjelp av definisjonen av "SDet(X)" at (9) (Ax)(xêX.->. CLov(x,w)) & X≠ø. Fra (3),(4), (8) og (9) følger nå:

(10) (Et')(Es)(EX)(t'<t&
TL(s,w,t') & (Ay)(yêX.->.CLov(y,w)) & X≠ø&
(LKm(u,UN(X,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(X,{l(s,t')}))

Men fra (7) og forutsetningen C1 følger negasjonen av (10). Dette gir en motsigelse og viser at (1) ikke holder under forutsetningene i teoremet. **Q.E.D.**

La oss nå studere vår andre inkompatibilitets-sats:

TEOREM 15.2: *(Inkompatibilitet 2) Anta D en svakt deterministisk teori i verdenen w, og at C2 holder. Anta videre at lukningen av den følgende formel holder:*

(+) M;t(u,x,w) &LK(u',u).->. M;t(u',x,w)

Anta dessuten at (Aw)(wêI.->. Ca(Mg(w' : w'~w))=1), mao. at Mg(w' : w'~w) bare inneholder et element. Da har vi: ¬(Et)(Ex)Fri(x,t,w).

Kommentar: Når det gjelder denne satsen kan endel av de bemerkningene som ble gjort i forbindelse med Teorem 15.1 gjentas. Dette gjelder kommentarene til forutsetningen (+) og forutsetningen om at (Aw)(wêI.->. Ca(Mg(w' : w'~w))=1). Også i denne satsen er det mulig å erstatte denne siste formelen med:

M;t(u,x,w) –>(Aw)(Aw')(wês(u) & w~w'–> w'ês(u))

Dette innebærer at også denne satsen kan skjerpes noe.

Videre bør det bemerkes at vi i teoremet ovenfor kan erstatte C2 med enhver sterkere betingelse blandt dem som ble anført i diagrammet helt til slutt i §14. Det kan også bemerkes at beviset for satsen lar seg gjennomføre med en del modifikasjoner om vi ertatter C2 med

[20] Se paragraf 13.

C2.3. Av plasshensyn skal vi imidlertid ikke gi et detaljert bevis for dette. Endelig nevner vi at man i konsekventen i teoremet kan erstatte "Fri(x,t,w)" med et hvilket som helst av de andre frihetsbegrepene som ble definert i §13, forutsatt at man legger til Q2 som ekstra-premiss om "Fri(x,t,w)" erstattes med "Fri;2(x,t,w)".

I satsen ovenfor kan vi imidlertid ikke bruke C1 i stedet for C2. Grunnen er at hvis Δ er en svakt deterministisk teori i w kan vi bare entydig predikere alle hendelsene som inntreffer etter et vilkårlig valgt tidspunkt t om vi kjenner hele verdensforløpet opp til dette tidspunkt. Det er ikke nok å bare ha kjennskap til hvilken totaltilstand verdenen w befinner seg i ved tidspunktet t.

Bevis: Anta (1) D en svakt deterministisk teori i verdenen w og at C2, og lukningen av (+), holder. Anta videre, for reduktio ad absurdum, at: (2) (Et)(Ex)Fri(x,t,w). Da finnes der selvfølgelig t og x slik at: (3) Fri(x,t,w). Fra definisjonen av Fri(x,t,w) følger da eksistensen av u;1 og u;2 der vi har:

(4) u;1,u;2êU & s(u;1)Ωs(u;2)=ø & M;t(u;1,x,w)&M;t(u;2,x,w))

Fra (4) følger u;2 impliserer negasjonen av u;1 og derfor har vi i lys av forutsetningen (+) at:

(5) M;t(u;1,x,w)&M;t(Neg(u;1),x,w))

Fra (1) og definisjonen av svakt deterministisk teori følger:

(6) ø≠D Inkl U

(7) (Ax)(xêD.->. CLov(x,w))

(8) (As)(At)(sêQ & têT. ->. ¬(l(s,t)êk(D)) & ¬(Neg(l(s,t)êk(D)))

(9) (At;1)(t;1êT.->.(At)(As)(têT & t;1<t & sêQ .->.
(l(s,t)êk(Un(D,{FH(w,t;1)})) v (Neg(l(s,t)êk(Un(D,{FH(w,t;1)}))

Vi ønsker nå å bevise at:

(¥) (Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø
(LKm(u;1,UN(D,{FH(w,t')})) v LKm(Neg(u;1),UN(D,{FH(w,t')})))

Siden det motsatte følger fra forutsetningen (C2) og (6) vil dette gi oss den ønskede motsigelse. Det må åpenbart i lys av aksiomene om tid i vår teori finnes et tidspunkt t' der (10) t'<t. En eller annen totaltilstand vil være realisert i verdenen w ved dette tidspunkt, det finnes derfor s slik at (11) TL(s,w,t'). Siden t'êT følger fra (9) at:

(12) (At)(As)(têT & t'<t & sêQ .->.
(l(s,t)êk(Un(D,{FH(w,t')})) v (Neg(l(s,t)êk(Un(D,{FH(w,t')})

Fra det vi nå har samlet sammen skulle det fremgå at det vil være tilstrekkelig å vise at enten u;1 eller negasjonen av u;1 er implisert av Un(D,{FH(w,t')}). Anta derfor for vilkårlig w' at w' er med i sannhetsmengden til Un(D,{FH(w,t')}). Fra definisjonen av FH(w,t') fremgår det da at w' har nøyaktig samme historie som w opp til og inkludert tidspunktet t'. Men fra (12) kan vi også utlede at (13) sannhetsmengden til Un(D,{FH(w,t')}) er inkludert i Mng(w":w"~w'). Fra dette og forutsetningen om at alle verdener med den samme historie, mao. som er historisk ekvivalente, er identiske følger:

(14) s(Un(D,{FH(w,t')})) = {w'}. Nå har vi selvfølgelig at
w'ês(u;1)vw'ês(Neg(u;1)).

I det første tilfelle følger w'ês(u;1). Siden w' var et vilkårlig element i Un(D,{FH(w,t')}) følger da LKm(u;1,Un(D,{FH(w,t')})). Er på den annen side wês(Neg(u;1)) følger på helt tilsvarende vis at LKm(Neg(u;1),Un(D,{FH(w,t')})). Vi har derfor:

(LKm(u;1,UN(D,{FH(w,t')})) v LKm(Neg(u;1),UN(D,{FH(w,t')}))

Fra dette, (10), (11) og (7) følger så (¥). Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Fra Teorem 15.2 og vårt hovedteorem i §11, Teorem 11.1, følger direkte den følgende sats som viser at kausalprinsippet i den form vi har gitt det er uforenelig med frihet gitt C2 og de andre forutsetningene i satsen. Også her kan vi erstatte C2 med de sterkere setningene som vi har nevnt tidligere. Når det gjelder konsekventen kan de samme bemerkningene gjøres som

ved satsene ovenfor: Man kan erstatte "Fri(x,t,w)" med "Fri;3(x,t,w)" og "Fri;4(x,t,w)" uten videre. Dessuten kan "Fri(x,t,w)" erstattes med "Fri;2(x,t,w)" om vi legger til formuleringen Q2 som en ekstra premiss.

TEOREM 15.3: *(Inkompatibilitet 3) La wêI. Anta Cd(Q)≥3. Anta at følgende påstand holder for alle h;1, h;2 og t, der h;1 såvel som h;2 er hendelser i snever forstand og t er et tidspunkt:*
(CA1) HEt(h;1,t,w) ->
(At;1)(t;1<t.->(Eh;2)(HFør(h;2,t;1,w) & CImp(h;2,h;1,w)))
Anta videre at vi definerer CT(w) = Mg(x : CLov(x,w)) og at det følgende holder:
(‡) (As)(At)(sêQ & têT .->. ¬(l(s,t)êk(CT(w)) & ¬ (Neg(l(s,t)êk(CT(w))))
Anta prinsippet C2 ovenfor holder. Anta videre at lukningen av den følgende formel holder:
(+) M;t(u,x,w) &LK(u',u).->. M;t(u',x,w)
Anta dessuten at (Aw)(wêI.->. Ca(Mg(w' : w'~w))=1), mao. at Mg(w' : w'~w) bare inneholder et element. Da har vi: ¬(Et)(Ex)Fri(x,t,w).

Det følgende er vårt neste hovedresultat om uforenelighet mellom determinisme og frihet:

TEOREM 15.4 *(Inkompatibiltet 4). Anta DetM(Δ,w,a) og at C2 holder. Da har vi om de følgende påstander holder helt generelt, dvs. for alle u,u',x,w og t:*
(1) M;t(u,x,w)&LK(u',u).->. M;t(u',x,w)
(2) (Aw)(wêI .->. Mg(w': w'~w)={w})
(3) (Au)(Aw)(CLov(u,w). ->.(Aw')(w'~w -> CLov(u,w'))) at :
(Ax)(¬(Et)(Fri(x,t,w)))

Kommentar: Vi har tidligere i denne paragrafen vist at om Δ er en strengt deterministisk teori i verdenen w eller om Δ er en svakt deterministisk teori i w så er frihet i de betydninger vi har nevnt ikke mulig under visse nærmere spesifiserte forutsetninger. Teoremet ovenfor viser at dette også er tilfelle om vi antar at Δ er en deterministisk teori verdenen w med parameter a≥0. Når det forøvrig gjelder satsen ovenfor holder de bemerkningene vi fremsatte i forbindelse med Teorem 15.2 bortsett fra det som ble nevnt som begrunnelse for at vi ikke kan bruke C1. Vi kan fremdeles ikke erstatte C2 med C1, men begrunnelsen er nå at hvis Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a og t er et vilkårlig valgt tidspunkt, bestemmer Δ bare entydig begivenhetsrekkene før tidspunktet t og etter tidspunktet t+a om man vet hvilken tilstand w befinner seg i ved alle tidspunkter i intervallet [t,t+a]. Hvis man derfor bare vet hvilken totaltilstand w befinner seg i ved et eller annet tidspunkt t' har man ikke den informasjon som trengs for "å beregne" det totale verdensforløp ved hjelp av Δ.

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Fra definisjonen av "DetM(Δ,w,a)" følger da:
(1) (Ax)(xêΔ.->. CLov(x,w)) & aêReell & a>0 &Δ≠ø
(2) (As)(At)(<s,t>êProd(Q,T) -> ¬(l(s,t)êk(Δ)) & ¬(Neg(l(s,t))êk(Δ)))
(3) (At)(têT -> (Et')(t' êT & t+a≥t' ≥t& CompS(ΔU{g;w(t,t')})))
Anta nå for vilkårlig t at (4) têT. I lys av (3) følger da at det finnes t' slik at:
(5) t' êT & t+a≥t' ≥t& CompS(ΔU{g;w(t,t')})
Fra (5) og definisjonen av "CompS" følger:
(6) Cons(ΔU{g;w(t,t')})
(7) (As)(At;1)(<s,t;1>êProd(Q,T).->. l(s,t;1)êk(ΔU{g;w(t,t')}) v
Neg(l(s,t;1))êk(ΔU{g;w(t,t')})
Vi ønsker nå å gi bevis for:
(¥) s(SNu(ΔU{g;w(t,t')})) = Mg(w': w' ~w)
For dette formål er det tilstrekkelig å vise de følgende to ting:

(A) (Aw')(w'ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')}.->. w' ~w)

(B) (Aw')(w' ~ w .->. s(SNu(ΔU{g;w(t,t')})))

Ad (A): Anta (8) w'ê s(SNu(ΔU{g;w(t,t')}. Vi må da vise at (+) (At)(têT.-> Hist(w')(t)=Hist(w)(t)) Fra dette følger jo per definisjon av " ~" at w ~w'. Anta for vilkårlig t;2 at (9) t;2êT. Sett nå per definisjon: (10) s;1 = Hist(w')(t;2) og

(11) s;2 = Hist(w)(t;2). Fra (10) følger:

(12) w'ês(l(s;1,t;2)) Vi har åpenbart at s;1êQ. Fra dette (9) og (7) følger:

(13) l(s;1,t;2)êk(ΔU{g;w(t,t')}) v Neg(l(s;1,t;2))êk(ΔU{g;w(t,t')})

Fra (8) og (12) følger åpenbart at ¬(Neg(l(s;1,t;2))êk(ΔU{g;w(t,t')})). Dette og (13) impliserer:

(14) l(s;1,t;2)êk(ΔU{g;w(t,t')}). Nå har vi åpenbart fra (1) og det at kausallover som gjelder i en viss verden er sanne i denne verden at: (15) True(w,SNu(Δ)). Men fra definisjonen av g;w følger True(w,g;w(t,t')). Dette innebærer at vi har: (16) True(w, SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Fra dette og (14) kan vi så utlede: True(w,l(s;1,t;2)). Dette innebærer at Hist(w)(t;2)=s;1= Hist(w')(t;2). Siden t;2 var et vilkårlig objekt som var med i T har dette som konsekvens at (+) holder og derfor at w ~w'. Dette viser at (A) holder.

Ad (B): Anta w' ~w for vilkårlig w'. Fra (1) har vi (Ax)(xêΔ .->.CLov(x,w)). I lys av forutsetning (3) i teoremet har vi da at (Ax)(xêΔ.->. CLov(x,w')) Dette innebærer at (17) True(w',Δ). Siden w' ~w følger per definisjon av "~" at

(18) (At)(têT.->. Hist(w)(t) = Hist(w')(t)). Vi har i lys av definisjonen av "g;w" at:

(19) g;w(t,t') = SNu/t;1ê[t,t']/(l(Hist(w)(t;1),t;1)

Vi må nå vise at (+) w'ês(g;w(t,t')). Dette innebærer at vi i lys av (19) må godtgjøre at

(++) (At;1)(t;1ê[t,t'].->. w'ês(l(Hist(w)(t;1),t;1))

Nå har vi imidlertid Hist(w);t =a <-> wês(l(a,t)) for alle w,t og a. (++), og dermed (+), følger derfor fra (18). Vi har derfor i lys av (17) og (+) at w'ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Dette viser at (B) holder.

Vi har nå vist at det følgende holder under de forutsetninger som er nevnt i teoremet:

(20) (At)(têT.->. (Et')(t'êT & t≤t'≤t+a & s(SNu(ΔU{g;w(t,t')})) = Mg(w': w' ~ w)))

Vi skal nå vise at den følgende påstand følger fra (20):

(21) uêU ->. (At)(têT.->. (Es)(Et')(ED)(t'≤t &TL(t',s,w) &
(Ay)(yêD.->. CLov(y,w)) & D≠ø&
(LK(u, DU{FH(w,t')}) v LK(Neg(u), DU{FH(w,t')})))

Anta derfor for vilkårlige objekter u,t at (22) uêU & têT. Da har vi om vi setter:

(22.1) t;1=t+a at t;1êT & t;1+a=t. Fra (20) følger eksistensen av t' slik at

(23) t'êT & t;1≤t'≤t;1+a & s(SNu(ΔU{g;w(t;1,t')})) = Mg(w': w' ~ w) Vi har åpenbart at

(24) t'≤t. Nå har vi videre i lys av definisjonene av FH og g;w at:

(24.1) FH(w,t') = s;-1(Mg(w': (At)(t≤t'.->. Hist(w')(t) = Hist(w)(t))))

(24.2) g;w(t;1,t') = s;-1(Mg(w': (At)(t;1≤t≤t' -> Hist(w')(t) = Hist(w)(t))))

Når det gjelder riktigheten av (24.1) og (24.2) henviser vi til det Lemma som følger umiddelbart etter dette beviset. Fra (24.1) og (24.2) følger at

(25) s(FH(w,t')) Inkl s(g;w(t;1,t')) Siden Mg(w' : w' ~ w) ={w} for alle wêI ifølge forutsetningene i teoremet og vi åpenbart har at wês(SNu(Δ)) & wês(FH(w,t')) følger at

(26) s(SNu(ΔU{FH(w,t')})) = s(SNu(ΔUg;w(t;1,t'))) = Mg(w': w' ~ w) = {w}

Siden wês(u) v wês(Neg(u)) følger herav:

(27) LK(u, ΔU{FH(w,t')}) v LK(Neg(u), ΔU{FH(w,t')})

Fra dette, det faktum at (Ay)(yêΔ -> CLov(y,w)) & Δ≠ø og det forhold at TL(s,w,t') om vi setter s= Hist(w)(t) følger konsekventen i (21). Dermed er denne formelen bevist.

Vi kan nå avslutte beviset. Anta mot formodning at det finnes x,t slik at Fri(x,t,w). Da finnes u;1 og u;2 der s(u;1)Ωs(u;2) =ø & M;t(u;1,x,w) & M;t(u;2,x,w). Herav følger LK(Neg(u;1), u;2) at M;t(u;1,x,w) & M;t(Neg(u;1),x,w). Dette og C2 impliserer imidlertid

negasjonen av konsekventen i (21). Dette gir oss en motsigelse. Det følger at ¬(Et)(Ex)(Fri(x,t,w). Herav følger så (Ax)(¬(Et)(Fri(x,t,w))). **Q.E.D.**

Vi har i beviset rett ovenfor benyttet oss av den følgende hjelpesetning hvor vi overlater beviset til leseren:

LEMMA 15.1: *Anta t',têT & wêI. Da gjelder:*
(a) FH(w,t') = s;-1(Mg(w': (At)(t≤t'.->. Hist(w')(t) = Hist(w)(t))))
(b) g;w(t;1,t') = s;-1(Mg(w': (At)(t;1≤t≤t' -> Hist(w')(t) = Hist(w)(t))))

Det følgende teorem, som vi får fra Teorem 15.4 ved å erstatte C2 med C4, er et av alle de korollarer som vi antydet i forbindelse med denne sats. Vi avstår derfor fra å gi utførlige kommentarer på akkurat dette punkt :

TEOREM 15.5: *(Inkompatibiltet 5). Anta DetM(Δ,w,a) og at C4 holder. Da har vi om de følgende påstander holder helt generelt, dvs. for alle u,u',x,w og t:*
(1) M;t(u,x,w)&LK(u',u).->. M;t(u',x,w)
(2) (Aw)(wêI .->. Mg(w': w'~w)={w})
(3) (Au)(Aw)(CLov(u,w). ->.(Aw')(w'~w -> CLov(u,w'))) at :
(Ax)(¬(Et)(Fri(x,t,w)))

Det følgende teorem representerer vår sjette hovedtese om uforeneligheten mellom determinsime og frihet:

TEOREM 15.6 *(Inkompatibilitet 6) Anta DetM(Δ,w) og at C2 holder. Anta videre for alle u,x,u',t og w at følgende gjelder:*
(1) M;t(u,x,w) & LK(u',u).->. M;t(u',x,w)
(2) (Aw)(wêI.->. Mg(w': w~w') ={w}
(3) (Au)(Aw)(Aw')(CLov(u,w) & w~w' -> CLov(u,w'))
Da gjelder: (At;1)(t;1êT.->.(Et')(t'≥t;1 &(At)(t>t'.->. (Ax)(¬Fri(x,t,w)))))

Kommentar: Det som skiller dette teoremet fra Teorem 15.4 er først og fremst to ting: Vi har erstattet premissen "DetM(Δ,w,a)" i Teorem 15.4 med den svakere betingelsen "DetM(Δ,w)". Videre ser man at konsekventen i teoremet er langt svakere enn i de teoremer vi så lang har betraktet i denne paragrafen. Konsekventen her sier bare at for ethvert tidspunkt t som vi velger å betrakte vil det finnes et eller annet etterfølgende tidspunkt t' slik at etter dette tidspunktet t' vil det alltid være umulig for noen å velge fritt i verdenen w. Grunnen til at bare denne svakere konsekventen holder er å finne i den tredje klausulen i definisjonen av "DetM(Δ,w)".

Bevis: Fra forutsetningen om at DetM(Δ,w) og den definisjon vi tidligere har gitt av dette uttrykket følger:
(1) (Ax)(xêΔ.->. CLov(x,w)) & Δ≠ø
(2) (As)(At)(sêQ & têT.->.(¬l(s,t)êk(Δ) & ¬ Neg(l(s,t))êk(Δ)))
(3) (At)[têT.->. (Et')(t'êT & t'≥t & CompS(Un(Δ,{g;w(t,t')})))]
Vi skal først ta sikte på å bevise:
(+) (At)[têT.->. (Et')(t'êT & t'≥t & s(SNu(ΔU{g;w(t,t')}))=Mg(w' : w' ~ w))]
Anta derfor for vilkårlig t at (4) têT. Da følger fra (3) at det finnes noe t' der (5): t'êT & t'≥t og hvor man dessuten har (6): CompS(Un(Δ,{g;w(t,t')})). Fra definisjonen av operasjonen Comp følger da:
(7) (At;1)(As;1)(t;1êT&s;1êQ.->.

l(s;1,t;1)êk(Un(Δ,{g;w(t,t')}) v Neg(l(s;1,t;1))êk(Un(Δ,{g;w(t,t')})
Vi må nå vise at s(SNu(ΔU{g;w(t,t')}))=Mg(w' : w' ~ w). For dette formål er det tilstrekkelig å bevise de de følgende to ting:
(A) (Aw')(w' ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})) -> w' ~ w) og dessuten
(B) (Aw')(w' ~ w -> w' ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})))

Ad (A). Anta for vilkårlig w' at (8) w' ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Vi må vise at w' ~w dvs. per def av relasjonen ~ at: (++) (At)(têT.->. Hist(w')(t) = Hist(w)(t)). Anta derfor for vilkårlig t;1 at
(9) t;1êT. Sett pr. definisjon s;1=d Hist(w)(t;1). Da har vi selvfølgelig at s;1êQ. Dette, (9) og (7) impliserer: (10) l(s;1,t;1)êk(Un(Δ,{g;w(t,t')})) v Neg(l(s;1,t;1))êk(Un(Δ,{g;w(t,t')})) Nå har vi åpenbart at wês(Δ) og wê s(g;w(t,t')) og derfor at (11) wês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Men fra definisjonen av s;1 følger at (12) wês(l(s;1,t;1)). De to påstandene (11) og (12) impliserer imidlertid at den høyre disjunkten i (10) er usann og at vi derfor må ha:
(13) l(s;1,t;1)êk(Un(Δ,{g;w(t,t')})). Fra dette og (8) har vi imidlertid at: w'ês(l(s;1,t;1)). Dette innebærer i sin tur at Hist(w')(t;1)=s;1=Hist(w)(t;1). Siden t;1 var et vilkårlig tidspunkt innebærer dette at vi har vist: w' ~w . Dette viser at (A) holder.

Ad (B). Anta for vilkårlig w' at (14) w' ~w. Fra (1) har vi at (15) (Ax)(xêΔ.->. CLov(x,w). Dette og forusetning 3 i teoremet innebærer at (Ax)(xêΔ.->. CLov(x,w'). Siden vi har generelt at (Au)(Aw)(CLov(u,w).->. True(w,u)) følger at (Ax)(xêΔ.->. w'ês(x)). Mao. har vi at
(16) w' êSNu(Δ). Vi må også vise at w'ê s(g;w(t,t')). Nå har vi:
(17) g;w(t,t')= s;-1(Mg(w': (At;1)(t≤t;1≤t'.-> Hist(w')(t;1)=Hist(w)(t;1))))
Men w' ~w innebærer per definisjon at (18) (At;1)(t;1êT.->. Hist(w)(t;1)=Hist(w')(t;1)). Men fra (17) og (18) følger åpenbart at (19) w'ê s(g;w(t,t')). Fra (16) og (19) har vi så det vi ønsker, nemlig at : w' ês(SNu(ΔU{g;w(t,t')})). Dette viser at (B) holder.

Siden vi nå har vist (A) og (B) kan vi konkludere med at (+) holder. Vi må nå vise at konsekventen i teoremet holder ie. at (At;1)(t;1êT.->.(Et')(t'≥t;1 &(At)(t>t'.->. (Ax)(¬Fri(x,t,w))))). Anta derfor for vilkårlig t;1 at (20) t;1êT. I lys av (+) har vi da at det må finnes et t' der
(21) t'êT & t'≥t;1 og (22) s(SNu(ΔU{g;w(t;1,t')}))=Mg(w' : w' ~ w))
Anta for reduktio ad absurdum at det finnes t og x der (23) t>t' & Fri(x,t,w). I lys av definisjonen av relasjonen Fri har vi da at det finnes u;1 og u;2 der:
(24) s(u;1)Ωs(u;2)=ø & M;t(u;1,x,w)&M;t(u;2,x,w)) Siden s(u;1)Ωs(u;2)=ø impliserer at LK(Neg(u;1), u;2) har vi i lys av (24) og forutsetning 1 i teoremet at;
(25) M;t(u;1,x,w)&M;t(Neg(u;1),x,w))
Fra (22) og den andre forutsetningen i teoremet følger: (26) s(SNu(ΔU{g;w(t;1,t')}))= {w}. Siden vi åpenbart har at wês(u;1).v. wês(Neg(u;1)) følger det at vi må ha:
(27) u;1 êk(Un(Δ,{g;w(t;1,t')}) v Neg(u;1)êk(Un(Δ,{g;w(t;1,t')})
Sett (28) s=d Hist(w)(t'). Da har vi i lys av (23) at t>t' & TL(s,w,t') Det skulle videre være klart i lys av (1) at (29) (Ax)(xêΔ.->. CLov(x,w)) & Δ≠ø. Nå har vi i lys av definisjonene av "g;w(t;1,t')" og "FH(w,t')" at
(29.1) g;w(t;1,t')= s;-1(Mg(w': (At)(t;1≤t≤t'.->. Hist(w')(t)=Hist(w)(t))))
(29.2) FH(w,t') = s;-1(Mg(w': (At)(têT&t≤t'.->. Hist(w')(t)=Hist(w)(t))))
Fra disse to ting fremgår det åpenbart at (30) LK(g;w(t;1,t'), FH(w,t')). Det følger også, som man sikkert lett ser, at wês(FH(w,t')). Dette, (30) og (26) impliserer at
(27) s(Un(Δ,{FH(w,t')}))= {w} Dette i sin tur impliserer:
(31) u;1 êk(Un(Δ,{FH(w,t')}) v Neg(u;1)êk(Un(Δ,{FH(w,t')}) Men fra (23), (29) og (31)

har vi at:

(32) (Et')(Es)(ED)(t'<t& TL(s,w,t') & (Ay)(yêD.->.CLov(y,w)) & D≠ø
(LKm(u,UN(D,{FH(w,t')})) v LKm(Neg(u),UN(D,{FH(w,t')})))

Men dette og (25) strider åpnbart mot forutsetningen om at C2 skal holde. Det kan derfor ikke finnes t,x slik at (23) holder, mao. har vi: (At)(t>t'.->. (Ax)(¬Fri(x,t,w))). Dette avslutter vår bevis for satsen. **Q.E.D.**

Den følgende sats er et direkte korollar til Teorem 15.6 siden C4 impliserer C2:

TEOREM 15.7 *(Inkompatibilitet 7) Anta DetM(Δ,w) og at C4 holder. Anta videre for alle u,x,u',t og w at følgende gjelder:*

(1) M;t(u,x,w) & LK(u',u).->. M;t(u',x,w)
(2) (Aw)(wêI.->. Mg(w': w~w') ={w}
(3) (Au)(Aw)(Aw')(CLov(u,w) & w~w' -> CLov(u,w'))

Da gjelder: (At;1)(t;1êT.->.(Et')(t'≥t;1 &(At)(t>t'.->. (Ax)(¬Fri(x,t,w)))))

Bevis: Opplagt siden Teorem 3 holder og betingelsen C4 impliserer betingelsen C2. **Q.E.D.**

Vårt neste teorem, som representerer vårt åttende hovedresultat om inkompatibilitet, angår predikatet "X er en deterministisk teori", "Det(X)". Dette ble definert i §8.2.

TEOREM 15.8 *(Inkompatibilitet 8) Anta C1 og Det(X). Anta videre:*

(1) M;t(u,x,w) & LK(u',u).->. M;t(u',x,w) holder for alle u,u',x,t og w.
(2) (Aw)(wêI.->. Mg(w': w' ~w) = {w})
(3) (Ax)(Aw)(Aw')(CLov(x,w) & w' ~w.->.Clov(x,w'))

Under disse forutsetningene holder:

(Ew)(wêSNu(X) & (Et;0)(t;0êT & (At)(t> t;0.->. (Ax)(¬Fri(x,t,w))))

Kommentar: Også i forbindelse med denne satsen er det passende å komme med en del forklarende bemerkninger. Når det gjelder forutsetningene (1) - (3) har vi kommentert dem tidligere og de bemerkningene vi da fremsatte kan gjentas her. Det som skiller dette teoremet fra de andre er imidlertid konklusjonen i det. Som man ser uttrykker denne bare at det finnes en eller annen mulig verden hvor alle utsagnene i teorien X er sanne og hvor ingen kan velge fritt etter etter eller annet tidspunkt. Dette er en konklusjon som er meget svakere enn konklusjonen i noen av de teoremer vi har betraktet tidligere.

Forøvrig gjør vi oppmerksom på at om vi erstatter C1 med noen av de sterkere betingelsene vi har angitt i §14 holder fremdeles teoremet. Dette gjelder også om vi erstatter C1 med C1.3, men da må den siste delen av beviset endres noe.

Endelig vil også de bemerkningene om "Fri(x,t,w)" som vi har latt ledsage satsene nevnt tidligere i denne paragrafen, gjelde her.

Bevis: Vi skal først vise at den følgende påstand holder:

(¥) Hvis Det(X) så finnes det en verden w og et par <t;0,s;0> der <t;0,s;0>êProd(T,Q) slik at
(+) s(SNu(XU{l(s;0,t;0)})) = Mg(w' : w' ~ w)

La oss bevise (¥): Anta Det(X). I lys av Definisjon 8.2.1, klausul (f), følger det da at det finnes s;0êQ og t;0êT samt wêI der vi har:

(1) wês(SNu(XU{l(s;0,t;0)})) & (Ay)(yêX.->. CLov(y,w)) & X≠ø
(2) l(s,t)êk(XU{l(s;0,t;0)}) v Neg(l(s,t))êk(XU{l(s;0,t;0)}) for alle par <s,t>êProd(Q,T)

Vi må bevise to ting for å etablere (+):

(A) (Aw')(w' ês(SNu(XU{l(s;0,t;0)})).->. w' ~w)

(B) (Aw')[w' ~w -> w' ês(SNu(XU{l(s;0,t;0)}))]

Ad (A): Anta (3) w' ês(SNu(XU{l(s;0,t;0)})) for vilkårlig w'. Det vil være tilstrekkelig for å etablere w' ~w å vise at:

(At)(têT -> Hist(w')(t) = Hist(w)(t))

La derfor t være et vilkårlig element i T. Det må finnes et element s;1 slik at Hist(w);t = s;1. Dette innebærer at TL(s;1,w,t). Fra (1) og (2) følger da: l(s;1,t)êk(XU{l(s;0,t;0)}). Men fra dette og (3) følger w'ês(l(s;1,t)) og derfor Hist(w')(t)=s;1. Det følger at Hist(w')(t) = Hist(w)(t). Dette viser at (A) holder.

Ad (B): Anta på den annen side (5) w' ~w. Vi må da vise at w'ês(Snu(X)) og at w'ês(l(s;0,t;0)). Fra (5) og den tredje forutsetningen i Teorem 5 følger at (6) (Ax)(Clov(x,w) <-> Clov(x,w')). Fra definisjonen av Det(X) følger (7) (Ax)(xêX.->. CLov(x,w)). Dette og (6) impliserer (Ax)(xêX.->. CLov(x,w')). Nå har vi videre at (Ax)(CLov(x,w'). ->. w' ês(x)). Vi har derfor at (Ax(xêX.->. w' ês(x)). Fra dette følger: (7.1) w'ês(SNu(X)). Fra (1) følger wês(l(s;0,t;0)). Siden w' ~w følger da åpenbart at w'ês(l(s;0,t;0)). Dette og (7.1) impliserer at w'ês(SNu(XU{l(s;0,t;0)})). Dermed har vi også vist at (B) holder. Vi har nå fullført beviset for påstanden (¥) ovenfor.

Vi skal nå fullføre beviset for selve satsen. I lys av (¥) og forutsetningene i teoremet har vi at det finnes w, t;0,s;0 der wêI og <t;0,s;0>êProd(T,Q) og hvor vi har:

(8) s(SNu(XU{l(s;0,t;0)})) = Mg(w' : w' ~ w). Siden vi per forutsetning har Cd(Mg(w':w'~w))=1 følger at (9) s(SNu(XU{l(s;0,t;0)})) = {w}. Fra (9) følger åpenbart (10) wês(Snu(X)). Siden t;0êT vil det være tilstrekkelig å bevise: (At)(t>t;0.->. ¬Fri(x,t,w)). Anta derfor for vilkårlig t at (11) t>t;0. Fra (9) følger wês(l(s;0,t;0)). Herav følger TL(s;0,w,t;0). Siden Det(X) har vi åpenbart (13) (Ay)(yêX -> CLov(y,w)) & X≠ø. Anta nå for reduktio ad absurdum at (14) Fri(x,t,w). Fra den definisjonen vi har gitt av relasjonen Fri følger da :

(15) s(u;1)Ωs(u;2)=ø & M;t(u;1,x,w) & M;t(u;2,x,w) for noen utsagn u;1 og u;2. Siden s(u;1)Ωs(u;2)=ø har vi LK(Neg(u;1),u;2). Dette, (15) og den første forutsetningen i teoremet impliserer at (16) M;t(u;1,x,w) & M;t(Neg(u;1),x,w). Vi har enten wês(u;1) eller ¬(wês(u;1)). I begge tilfelle har vi i lys av (9) at

(17) LK(u;1,XU{l(s;0,t;0)}) v LK(Neg(u;1), XU{l(s;0,t;0)})

Fra (11), (12), (13) og (17) følger imidlertid:

(Et')(Es)(EX)(t'<t& TL(s,w,t) & (Ay)(yêX -> CLov(y,w)) & X≠ø &
LK(u;1,XU{l(s;0,t;0)}) v LK(Neg(u;1), XU{l(s;0,t;0)})

Men dette og (16) strider åpenbart mot forutsetningen C1 i teoremet. Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Vi har nå kommet frem til vårt niende og siste hovedresultat om uforeneligheten mellom frihet og determinisme.

Ved formuleringen av denne sats har vi funnet det nødvendig å innføre et hjelpebegrep. Det dreier seg om en ternær relasjon E definert på den følgende måte:

Definisjon 15.1: E(t,w;1,w;2) <-> (At')(t' > t.->. Hist(w;1)(t') = Hist(w;2)(t'))

Som man ser holder relasjonen E(t,w;1,w;2) hvis og bare hvis verdenene w;1 og w;2 er historisk sett identiske ved ethvert tidspunkt som kommer etter tidspunktet t, dvs. at ved ethvert slikt tidspunkt befinner vil den samme totaltilstand foreligge realisert i de to verdenene w;1 og w;2. Det skulle være opplagt at dette er en ekvivalens-relasjon.

TEOREM 15.9 *(Inkompatibilitet 9) Anta C1 og Det(X,w;0,t;0). Anta det følgende holder for alle entiteter t, t;2, u, x og w:*

(1) M;t(u,x,w) & t;2<t -> (Aw;1)(w;1ês(u) & E(t;2,w;1,w;2) -> w;2ês(u))

Anta videre at:

(2) (Ax)(xêX.->.CLov(x,w) & Hist(w)(t;0) = Hist(w;0)(t;0)

(3) (Aw)(E(t;0,w,w;0).->. (Ax)(xêX.->.CLov(x,w)))

Da gjelder:

(At)(t>t;0.->. (Ax)(¬Fri(x,t,w))).

Kommentar: Man ser med en gang at forutsetningene i dette teoremet er anderledes enn i våre tidligere teoremer og at konklusjonen i det er langt svakere enn i f.eks. vår første sats om inkompatibilitet. Hva de enkelte forutsetningene uttrykker skulle i og for seg være klart om man leser dem nøye igjennom og erindrer definisjonene av de forskjellige uttrykk som inngår i disse setningene. Den funksjonen de enkelte forutsetningene har i satsen ser man imidlertid først klarere når man leser igjennom beviset. La oss se litt nærmere på dette: Under forutsetningene i satsen beviser vi at:

s(SNu(XU{l(s;0,t;0)})) = Mg(w' : E(t;0,w,w'))

Mao. viser vi at sannhetsmengden til snittet av alle utsagnene i teorien X utvidet med utsagnet l(s;0,t;0) er identisk med E-ekvivalensklassen til w med hensyn på tidspunktet t;0. Det er fordi vi ønsker å være istand til å bevise dette at vi trenger forutsetningene (2) og (3) i teoremet. For å vise at konsekventen holder ønsker vi så å vise at om u;1 og u;2 er to utsagn som beskriver forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t, der t>t;0, har vi at Mg(w' : E(t;0,w,w')) enten er inkludert i sannhetsmengden til u;1 eller i sannhetsmengden til negasjonen av u;1. Det er for å kunne vise dette at vi trenger forutsetningen (1).

Også når det gjelder denne satsen kan man bemerke at forutsetningen C1 kan erstattes med en hvilken som helst annen sterkere setning av dem som er oppført i diagrammet sist i §14. Man kan også erstatte C1 med C1.3 i satsen ovenfor, men da må den siste delen av beviset gjennomføres på en litt annen måte. Av plasshensyn skal vi ikke komme nærmere inn på dette. Men det er en utmerket oppgave for leseren å gjennomføre resonnementet på egen hånd.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Fra definisjonen av "Det(X,w;0,t;0)", dvs. Definisjon 8.3.1 følger:

(1) Mng(X) & X inkl U & (Ax)(xêX.->. CLov(x,w;0)) &X≠ø

(2) (Ax)(At)(<t,x>êProd(T,Q) -> [¬(l(x,t)êk(X)) & ¬(Neg(l(x,t))êK(X))])

(3) (Ax)(xêX -> w;0ês(x))

(4) (As)(At)(<s,t>^Prod(Q,T) & t>t;0. ->.
l(s,t)ê k(XU{l(s;0,t;0}) v Neg(l(s,t))ê k(XU{l(s;0,t;0})

hvor (4.1) s;0 = (is)(TL(s,w;0,t;0)

På basis av (1) - (4) skal vi vise, under forutsetningene som ellers er angitt i teoremet at (+) (At)(t> t;0 .->. (Ax)(¬Fri(x,t,w)))

Vi har fra forutsetningene i satsen at :

(5) (Ax)(xêX.->.CLov(x,w))

(6) Hist(w)(t;0) = Hist(w;0)(t;0)

Vi skal i første omgang forsøke å vise:

(¥) s(SNu(XU{l(s;0,t;0)})) = Mg(w' : E(t;0,w',w;0))

Det vil være tilstrekkelig å bevise de følgende to påstander:

(A) (Aw')(w'ês(SNu(XU{l(s;0,t;0)})).->. E(t;0,w',w;0))

(B) (Aw')(E(t;0,w',w;0).->. w'ês(SNu(XU{l(s;0,t;0)})))

Ad (A): Anta for vilkårlig w' at (7) w'ês(SNu(XU{l(s;0,t;0)})). Da følger w'ês(l(s;0,t;0)) og derfor at (8) Hist(w')(t;0) = s;0 = Hist(w;0)(t;0). Vi må imidlertid også bevise den følgende påstand:

(9) (At)(t>t;0. ->. Hist(w')(t) = Hist(w;0)(t)). Fra (1) og (4.1) følger:

(10) w;0ê s(SNu(XU{l(s;0,t;0)})). Anta nå for vilkårlig t at (11) t>t;0. Fra (7) og (109 følger det at vi har (12) w',w;0 ê s(SNu(XU{l(s;0,t;0)})). Sett (13) s;1=Hist(w');t . Siden t>t;0 og s;1êQ har vi i lys av (4) at:

(14) l(s;1,t)ê k(XU{l(s;0,t;0}) v Neg(l(s;1,t))ê k(XU{l(s;0,t;0})

Siden w'ê s(SNu(XU{l(s;0,t;0)})) og w'ês(l(s;1,t)) (i lys av (13)) kan vi åpenbart ikke ha at disjunkten til høyre i (14) holder. Dette impliserer (15) l(s;1,t)ê k(XU{l(s;0,t;0}). Men dette og (12) innebærer at: w;0ês(l(s;1,t). Men da må vi ha: Hist(w;0)(t) = s;1 = Hist(w')(t) (Jmf. (13)). Dermed har vi bevist at (9) holder. Fra (8) og (9) følger i lys av definisjonen av relasjonen E at E(t;0,w',w;0). Dette viser at (A) holder.

Ad (B): Fra den tredje forutsetningen i teoremet har vi:

(16) (Aw)(E(t;0,w,w;0) -> (Ax)(xêX.->. CLov(x,w)))

Anta for vilkårlig w' at (17) E(t;0,w',w;0). Fra dette og (16) følger:

(Ax)(xêX -> CLov(x,w')). Herav har vi enn mer, siden "CLov(x,w)" impliserer at "wês(x)", at (18) w'ês(SNu(X)). Fra (17) og definisjonen av E følger også at Hist(w');(t;0) = Hist(w;0);(t;0) = s;0 (Jmf. (4.1)) Det følger at w'ês(l(s;0,t;0)) og derfor i lys av (18) at (19) w'ê s(SNu(XU{l(s;0,t;0})). Dette viser at (B) holder. Vi har nå gitt et bevis for (¥) under de forutsetningene som er angitt i teoremet.

Anta nå mot formodning at det finnes x, t der:

(20) t>t;0 & Fri(x,t,w).

Vi har da at det finnes u;1 og u;2 slik at:

(21) s(u;1)Ωs(u;2)=ø & M;t(u;1,x,w) & M;t(u;2,x,w)

Siden vi forutsetter M;t(u;1,x,w) & LK(u;2,u;1). ->. M;t(u;2,x,w) for alle u;1, u;2, x, t og w følger: (22) M;t(u;1,x,w) & M;t(Neg(u;1),x,w). Fra (5) og (6) har vi:

(23) TL(s;0,w,t;0) & (Ax)(xêX -> CLov(x,w)) & X≠ø.

Fra den første forutsetningen i teoremet har vi videre for alle u:

(24) M;t(u,x,t) -> (Aw;1)(w;1ês(u).->. Mg(w': E(t;0,w',w;1)) Inkl s(u))

Det er nå to muligheter: (i) wês(u;1). Siden M;t(u;1,x,w) følger da

(25) Mg(w': E(t;0,w',w)) Inkl s(u;1)). Fra (5) og (6) følger: wês(SNu(XU{l(s;0,t;0)})) Dette og (¥) impliserer (25.1) E(t;0,w,w;0). Siden E åpenbart er en ekvivalensrelasjon har vi:

Mg(w': E(t;0,w',w;0)) Inkl s(u;1) Dette og (¥) impliserer (26) u;1êk(XU{l(s;0,t;0)}) (ii) wêNeg(u;1). Igjen har vi i lys av (24) at Mg(w': E(t;0,w',w)) Inkl s(Neg(u;1))). Siden (25.1) holder har vi Mg(w': E(t;0,w',w;0)) Inkl s(Neg(u;1)). Dette og (¥) impliserer:

(27) Neg(u;1)ê k(XU{l(s;0,t;0)}). I begge tilfelle har vi at:

(28) u;1ê k(XU{l(s;0,t;0)}) v Neg(u;1)êk(XU{l(s;0,t;0)}).

Men (21), (23) og (28) impliserer åpenbart negajonen av forutsetningen C1 i teoremet. Det kan derfor ikke finnes x,t slik at (20) holder. Dette avslutter vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Vi har nå presentert, og gjennomført beviset for, våre viktigste satser angående uforeneligheten mellom frihet og determinisme. La oss imidlertid bemerke et par ting til slutt:

I §8 ga vi definisjoner innenfor rammen av L(DF) av en rekke "determinisme-predikater", f.eks. "DetM(Δ,w,a)". I alle disse definisjonene har vi forutsatt at Δ er en teori som er konsistent med såvel l(s,t) som negasjonen av utsagnet l(s,t) for alle par <s,t> der s er en totaltilstand og t er et tidspunkt. Mao. har vi krevd i disse definisjonene at Δ er en teori som ikke i seg selv sier noe om hvilken totaltilstand som foreligger realisert ved et gitt, vilkårlig valgt, tidspunkt. Studerer man imidlertid nærmere de satsene som vi har presentert i denne paragrafen spiller denne forutsetningen ingen rolle i noen av bevisene. Det følger fra dette at alle disse satsene fremdeles vil holde om vi tenker oss at vi fjernet denne klausulen i definisjonene av "DetM(Δ,w,a)" og "DetM(Δ,w)". Videre ville de satser hvor vi forutsetter at Δ er en strengt deterministisk teori, en deterministisk teori, eller en deterministisk teori i

verdenen w relativt til tidspunktet t også fortsatt holde om vi fjerner denne klausulen i definisjonene av predikatene "SDet(Δ)", "Det(Δ)" og "Det(Δ,w,t)".

Har vi nå definitivt vist at determinisme er uforenelig med frihet? Resultatene ovenfor gir ikke noe grunnlag for en så kategorisk konklusjon. Men aksepterer man f.eks. noen av de sterkeste tilleggspremissene vi gjorde rede for i §14, f. eks. C5 eller C4.2 og ellers finner våre eksplikasjoner av determinisme og frihet akseptable er det vanskelig å se hvordan man kan forene disse to ting.

§16 Om setningene C1- C5 og Moores analyse av "kunne".

Vi presenterte en rekke definisjoner av frihet, eller mer nøyaktig predikatet "x kan velge fritt ved tidspunktet t i verdenen w" i §13. I alle disse definisjonene ble dette predikatet definert ved hjelp av det følgende primitive predikat i L(DF): "u er et utsagn som beskriver et forhold det står i personen x's makt å realisere relativt til tidspunktet t". I denne paragrafen skal vi se på muligheten av å analysere dette siste predikatet ved hjelp av de andre primitive predikatene i L(DF), og dermed på muligheten av å gi en litt mer dyptgående analyse av frihetsbegrepet.

Vi skal ta vårt utgangspunkt i Moores analyse av "kunne". En interessant ting ved Moores analyse av dette begrep er at han forsøker å definere "kunne" på en slik måte at det nettopp blir forenelig med full determinisme å si at man i en rekke situasjoner kunne ha gjort noe annet enn det man faktisk gjorde. Moores (og andres) refleksjoner over dette emne er derfor av den største relevans for de spørsmål vi så langt har diskutert i dette arbeidet.

Moore skriver i sin "Ethics" følgende: [21]

"La oss begynne med å spørre: Hva er betydningen av ordet 'kunne' der det er sikkert at vi ofte *kunne* gjøre noe som vi ikke gjorde. I hvilken betydning er det, for eksempel, at jeg i dag morges *kunne* ha spasert en kilometer på et kvarter selv om jeg ikke gjorde det? Det er et forslag som er nærliggende. Nemlig at det jeg mener rett og slett bare er at jeg kunne, *hvis* jeg hadde valgt. Eller (for å unngå en mulig komplikasjon) kanskje vi heller skulle si 'at jeg *hadde* gjort det, *hvis* jeg hadde valgt'. Med andre ord forslaget går ut på at vi ofte bruker uttrykket "Jeg *kunne* ' rett og slett som en forkortning for 'Jeg *hadde* gjort det, hvis jeg hadde valgt.' Og i alle tilfeller der det er sikkert at vi *kunne* gjøre noe som vi ikke gjorde, der tror jeg det er meget vanskelig å være helt sikker på at det *ikke* er dette (eller noe lignende) vi mener med ordet 'kunne' "

En rimelig fortolkning av Moore på dette punkt synes å være at han betrakter den følgende analyse som mulig:

> (M1) x kan utføre handlingen h hvis og bare hvis det er slik at hvis x velger å utføre handlingen h så er det slik at x utfører handlingen h.

Det er nærliggende å sammenligne formuleringen (M1) med den følgende formulering hvor vi bare benytter konstruksjoner som vi tidligere har innført og som kan formaliseres innenfor vår ramme:

> (M2) u er et utsagn som beskriver noe det står i personen x´s makt å gjøre relativt til tidspunktet t hvis og bare hvis det finnes et tidspunkt t' som enten kommer før t eller

[21] Se Moore [1], side 163-164. Oversettelsen er Eivind Storheims.

som er identisk med t og som er slik at hvis u beskriver noe x ved tidspunktet t' fatter en beslutning om å gjøre så er det slik at u beskriver noe x realiserer.

Det er også nærliggende å sammenligne (M2) med den følgende formulering som er litt anderledes enn (M2), nemlig:

(M3) u er et utsagn som beskriver noe det står i personen x´s makt å gjøre relativt til tidspunktet t hvis og bare hvis det finnes et logisk sett konsistent utsagn u;1 og et tidspunkt t' som oppfyller de følgende tre krav, nemlig (i) at t' enten kommer før eller er identisk med t og (ii) u;1 er et konsistent utsagn som impliserer u og (iii) hvis u;1 beskriver noe x ved tidspunktet t' fatter en beslutning om å gjøre så er det slik at u beskriver noe x realiserer.

I både (M1) og (M2) synes det naturlig å forutsette at u er et utsagn som beskriver en mulig hendelsesrekke som logisk sett bare kan inntreffe etter tidspunktet t. Videre er det naturlig å forutsette at det "Hvis-så"-begrep som benyttes er av en kausal art.

Vi har tidligere innført de følgende konstruksjoner, nemlig (1) "Utsagnet x beskriver et forhold personen y ved tidspunktet t fatter en beslutning om å gjøre i verdenen w", som vi forkortet med "Besl(x,y,t,w)", og (2) "Utsagnet x beskriver noe personen y gjør i verdenen w", som vi forkortet med "Br(x,y,w)". I forbindelse med disse to konstruksjonene innførte vi de følgende to definisjoner:

D1: Besl*(x,y,t) = s;-1(Mg(w: Besl(x,y,t,w)))
D2: Br*(x,y) = s;-1(Mg(w : Br(x,y,w))

Besl*(x,y,t) er det utsagnet at x beskriver noe personen y fatter en beslutning om å gjøre ved tidspunktet t. Br*(x,y) er utsagnet at x beskriver noe y gjør. Vi har tidligere innført en kausal implikasjonsrelasjon mellom hendelser. Vi skal nå mere generelt betrakte en kausal implikasjonsrelasjon mellom utsagn. Er u;1 og u;2 to utsagn skal vi si at u;2 impliserer u;1 kausalt i verdenen w hvis og bare hvis u;1 er med i konsekvenssystemet til mengden av alle de kausallover som gjelder i verdenen w utvidet med utsagnet u;2. Vi bruker "CImp;w(u;2, u;1)" for å betegne denne relasjon. Relasjonen kan formelt defineres slik:

CImp;w(u;2,u;1) <-> u;1êk(Mg(z: CLov(z,w)) U{u;2})

Siden xêk(ΔU{y}) er ekvivalent med C(x,y)êk(Δ) ser man at definisjonen ovenfor er ekvivalent med:

CImp;w(u;2,u;1) <-> C(u;2,u;1)êk(Mg(z: CLov(z,w)))

Vi trenger også en definisjon av hva som menes med at u beskriver et hendelsesforløp som logisk sett bare kan inntreffe etter tidspunktet t, "Etter(t,u)". Umiddelbart virker det ikke helt søkt å si at dette er tilfelle hvis og bare hvis det er slik at hvis w er en verden som er med i sannhetsmengden til u så er også enhver verden som er historisk identisk med w fra og med tidspunktet t også med i sannhetsmengden til u. Formelt kan denne definisjonen uttrykkes slik:

Etter(t,u) <-> (Aw)(wês(u) ->(Aw')((t')(t'≥t->
Hist(w');t'=Hist(w);t') &w'êI.->.w'ês(u)))

Vi har nå definert de begreper som inngår i definiens i den følgende definisjon av "x er et utsagn som beskriver noe det står i personen a´s makt å gjøre relativt til tidspunktet t i verdenen w":

(M4) M;t(x,a,w) <-> Etter(t,x) & (Et')(t'≤t& CImp;w(Besl*(x,a,t'), Br*(x,a)))

Denne tesen kan sammenlignes med:

(M5) M;t(x,a,w) <-> Etter(t,x) &(Eu)(Et')(t'≤t& uêU &
s(u)≠ø& LK(x,u) &CImp;w(Besl*(u,a,t'),Br*(x,a)))

La oss før vi går videre bemerke at M4 og M5 kan oppfattes som formaliserte versjoner innenfor rammen av L(DF) av henholdsvis M2 og M3. [22]

Det synes ikke som om denne siste setningen er uten enhver plausibilitet. Likevel er dette bare en setning som vi betrakter og ikke en setning som vi har gjort oss opp noen bestemt mening om er sann eller usann. Hensikten med å betrakte denne tesen er at hvis M defineres på denne måten og vi ellers definerer frihet som vi har gjort tidliger (ved F1) er det intet som forhindrer at frihet kan være fullt forenelig med determinisme. Vi finner det svært vanskelig å gi noen avgjørende argumenter for eller mot (M4) eller (M5). Man kan sikkert regne med at ganske få vil synes de virker selvinnlysende eller rimelige og at et tilsvarende antall vil stille seg høyest tvilende. Noen vil sikkert med en gang forsøke å stille opp skarpsindige og intrikate moteksempler. Fra vår synsvinkel synes det mest interessant å se nærmere på hvordan disse setningene er relatert til setningene C1- C4. Er det mulig å gi bevis for noen interessante satser i denne forbindelse?

La oss betrakte den følgende liste med åpne setninger:

(i) wêI &SDet(Δ) & têT
(ii) (Ax)(xêΔ -> True(w,x))
(iii) Etter(t,x;1) & x;1êU
(iv) (Eu)(Et')(t'≤t& uêU &s(u)≠ø& LK(x;1,u) & CImp;w(Besl*(u,a,t'),Br*(x;1,a)))
(v) Etter(t,x;2) & x;2êU& s(x;1)Ωs(x;2)=ø
(vi) (Eu)(Et')(t'≤t& uêU &s(u)≠ø& LK(x;2,u) & CImp;w(Besl*(u,a,t'),Br*(x;2,a)))

Konjunksjonen av disse seks åpne setningene inneholder utelukkende "w","Δ","t", "x;1" og "x;2" som fri variabler. La oss kalle den eksistensielle lukningen av konjunksjonen av setningene (i) - (vi) for P. Når det gjelder denne setningen P er det i og for seg intet som tilsier at den skulle være spesielt urimelig. Det dreier seg, som man ser, om en temmelig svak eksistenspåstand. Selvom man ikke mener at verden faktisk er determinert er dette ikke noe spesielt sterkt argument for å benekte at det kan være slik at den er det, mao. at det finnes en mulig verden w og en strengt deterministisk teori Δ hvor alle utsagnene i Δ er sanne i w og hvor det også finnes utsagn x;1 og x;2 som oppfyller kravene (iii) - (vi). I det talløse mangfold av mulige verdener av mer eller mindre eiendommelig art kunne det vel tenkes at det fantes en som oppfyllte betingelsene ovenfor.

Det man nå kan vise er det følgende, nemlig at hvis man aksepterer P og den universelle lukning av setningen C1 som vi tidligere har formulert, så må man akseptere negasjonen av lukningen av M5. Dette holder riktignok ikke ubetinget, man må også legge til de følgende to premisser:

(1) (Aw)(wêI -> Mg(w': w'~w)={w})
(2) (Ax)(Aw)(Aw')(CLov(x,w) & w~w' -> CLov(x,w'))

Vi formulerer teoremet slik:

TEOREM 16.1 *Anta P holder og at den universelle lukning av C1 holder. Anta videre at:*
(i) (Aw)(wêI -> Mg(w': w'~w)={w})

[22] Det bør sterkt understrekes at vi ikke uten videre, om i det hele tatt, vil tilskrive Moore tesene M2 – M5. Disse formuleringene står helt for vår egen regning.

(ii) (Ax)(Aw)(Aw')(CLov(x,w) & w~w' -> CLov(x,w'))
Da har vi at negasjonen av den universelle lukning av M5 holder.

Kommentar: Som man ser innebærer dette teoremet at det er en viss konflikt mellom setningene C1 og definisjonen M5. Aksepterer man som uproblematiske forutsetningene i teoremet følger det at man ikke kan akseptere M5 om man er villig til å akseptere C1. Det omvendte gjelder også: Aksepterer M5, og går man utfra at P og forutsetningen (i) og (ii) holder følger det ved hjelp av teoremet at man ikke bør akseptere setningen C1. Dette i sin tur impliserer at man ikke bør akseptere noen av de "C-setningene" i §14 som vi viste at impliserte C1. Teoremet ovenfor har derfor en viss interesse fordi det sammen med våre andre resultater viser endel av de konsekvenser man bør akseptere om man aksepterer M5.

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Anta for reduktio ad absurdum at M5 holder generelt. Fra forutsetningen P følger at det finnes w, t, x;1, x;2 og Δ slik at:
(1) wêI &SDet(Δ) & têT
(2) (Ax)(xêΔ -> True(w,x))
(3) Etter(t,x;1) & x;1êU
(4) (Eu)(Et')(t'≤t& uêU &s(u)≠ø& LK(x;1,u) & CImp;w(Besl*(u,a,t'),Br*(x;1,a)))
(5) Etter(t,x;2) & x;2êU& s(x;1)Ωs(x;2)=ø
(6) (Eu)(Et')(t'≤t& uêU &s(u)≠ø& LK(x;2,u) & CImp;w(Besl*(u,a,t'),Br*(x;2,a)))

Fra (1) og (2) følger at det finnes en utsagnsmengde Δ hvor vi har:
(7) SDet(Δ) & (Ax)(xêΔ.->. True(w,x)).
Siden têT følger det fra de tidsteoretiske antagelsene i vår teori at det finnes tidspunkt t' som kommer før t, ie. det finnes t' der (8) t'êT & t'<t. Siden w har en historie følger at det finnes sêQ slik at (9) TL(s,w,t') Fra (7), definisjonen av "SDet(Δ)", forutsetning (ii) i teoremet og et teorem vi tidligere har bevist følger:
(10) s(SN(UN(Δ,{l(s,t')}))) = Mg(w' : w' ~w)
Fra dette og forutsetningen om at (Aw)(wêI.->. Ca(Mg(w' : w'~w))=1) følger at det finnes w'êI slik at (11) s(SN(UN(Δ,{l(s,t)}))) = {w'}. Nå har vi fra (3) - (6) og M5 at det finnes utsagn x;1 og x;2 slik at :
(12) s(x;1)Ωs(x;2)=ø & M;t(x;1,x,w)&M;t(x;2,x,w)
Siden de to utsagnene er uforenelige følger at x;2 impliserer Neg(x;1), ie at
(13) LK(Neg(x;1),x;2). Vi nevner at man ganske lett på basis av definisjonen M5 kan vise:
(14) (Au)(Au')(M;t(u,x,w) &LK(u',u) -> M;t(u',x,w))
Fra dette, (13) og (12) følger:
(15) M;t(x;1,x,w)&M;t(Neg(x;2),x,w)
Vi har at w'êI. Det følger derfor at vi enten har w'ês(x;1) eller w'ês(Neg(x;1)). I det første tilfelle har vi LKm(x;1, UN(Δ,{l(s,t')})) . I det andre tilfelle har vi
LKm(Neg(x;1), UN(Δ,{l(s,t')})) . I alle tilfelle må vi da ha:
(16) LKm(x;1, UN(Δ,{l(s,t')})).v.LKm(Neg(x;1), UN(Δ,{l(s,t')}))
Fra (2) følger det at wês(SN(Δ)) og derfor ved hjelp av definisjonen av "SDet(Δ)" at (17) (Ax)(xêΔ.->. CLov(x,w)) & Δ≠ø. Fra (8),(9), (16) og (17) følger nå:
(18) (Et')(Es)(EΔ)(t'<t&
TL(s,w,t') & (Ay)(yêΔ.->.CLov(y,w)) &
(LKm(u,UN(Δ,{l(s,t')})) v LKm(Neg(u),UN(Δ,{l(s,t')}))
Men fra (15) og forutsetningen C1 følger negasjonen av (10). Dette gir en motsigelse og viser at vi ikke kan anta at M5 holder generelt. **Q.E.D.**

Studerer man detaljene i beviset ovenfor ser man at det har betraktelige likhetspunkter med vårt bevis for Teorem 15.1. Likhetspunktene er for så vidt så store at man kan være fristet til å si at satsen er en annen versjon av Teorem 15.1.
I denne forbindelse er det derfor nærliggende å komme med de følgende betraktninger: La oss tenke oss at vi i formuleringen P (som er konjunksjonen av (i) - (vi) ovenfor) erstatter "SDet(Δ)" med "Δ er en svakt deterministisk teori i verdenen w". Vi kaller den nye setningen for P'. Da holder Teorem 16.1 om vi erstatter P med P' og dessuten setter inn C2 istedet for C1. Beviset blir imidlertid annerledes. I det vesentlige vil det ha en struktur som ligner på den til beviset for Teorem 15.2. Poenget er altså at man kan betrakte en rekke varianter av Teorem 16.1.

En annen sak som vi også vil nevne på dette punkt er at det er mulig å generalisere teoremet ovenfor. Satsen viser ikke så meget at det er noe spesielt galt med den Moore-inspirerte definisjonen M5. Snarere retter det seg mot enhver definisjon av konstruksjonen "M;t(u,x,w)" som er forenelig med determinisme. La oss se litt nærmere på dette. La ∂(u,t,x,w) være en formel i L(DF) som ikke inneholder predikatet "M;t(u,x,w)". La D være lukningen av den følgende formel i L(DF):

(1) M;t(u,x,w) <–> ∂(u,t,x,w)

og la oss anta vi stiller det krav at man fra D kan utlede :

(2) M;t(u,x,w) & LK(u',u) –> M;t(u',x,w)

La nå P+ være den eksistensielle lukning av konjunksjonen av de følgende formler i L(DF):

(a) wêI & SDet(Δ) & têT
(b) (Ax)(xêΔ –> True(w,x))
(c) x;1êU & ∂(x;1,t,a,w)
(d) x;2êU & ∂(x;1,t,a,w)
(e) s(x;1)Ω s(x;2) = ø

Da kan vi vise at den følgende sats holder:

TEOREM 16.2 *Anta P+ holder og at den universelle lukning av C1 holder. Anta videre at:*
(i) (Aw)(wêI -> Mg(w': w'~w)={w})
(ii) (Ax)(Aw)(Aw')(CLov(x,w) & w~w' -> CLov(x,w'))
Da har vi at negasjonen av setningen D holder.

Beviset for denne sats er helt analogt med beviset for Teorem 16.1. Det eneste man behøver å gjøre er å erstatte alle instanser av definiens i M5 overalt hvor de forekommer med tilsvarende instanser av ∂(u,t,x,w). Det vi derfor kan sies å ha vist er at enhver definisjon D som oppfyller kravene ovenfor ikke så lett lar seg forene med setningen C1 eller noen av de C-setningene som vi har vist at impliserer denne.

§17 Ytterligere refleksjoner over den mulige uforenelighet mellom determinisme og frihet.

Tidligere har vi definert en rekke determinismebegreper. Gitt disse definisjonene og de definisjoner vi har gitt av frihet har vi vist at under visse betingelser er frihet og determinisme uforenelige. De betingelser det dreier seg om er betingelsene C1 - C4 som vi har behandlet ovenfor. Det er imidlertid ikke utelukket at det kan defineres mer generelle determinismebegreper som er av en slik art at selv om vi forutsetter at noen av betingelsene C1 - C4, eller visse varianter av dem holder, så kan vi likevel ikke vise at frihet er uforenelig med determinisme. Med andre ord behøver det ikke være slik at noen av de betingelsene vi så langt har betraktet utelukker visse former for determinisme selvom vi legger til grunn de frihetsbegreper som vi så langt har tatt i betraktning og går ut fra at mennesket er fritt i noen av disse betydningene.

Vi skal nå i akkurat denne paragrafen se på et determinisme-begrep som er mer omfattende, og derfor i en hvis forstand svakere, eller mer generelt, enn dem vi har betraktet tidligere i §8. Men for å gi en presis og kompakt definisjon av dette begrep finner vi oss nødsaget til å fiksere en del hjelpe-begreper.

Anta wêI og at têT. Anta wês(u), mao. at w er med i sannhetsmengden til utsagnet u. Hvis da enhver verden w' som er historisk identisk med w opp til og inkludert tidspunktet t også er med i s(u) innebærer dette at u ikke har som logisk konsekvens noe utsagn som sier noe om hvilke totaltilstander som vil inntreffe etter tidspunktet t. Dette innebærer at i en viss forstand at utsagnet u ikke sier noe om hva som vil skje etter tidspunktet t. Vi skal derfor si at et utsagn x beskriver en hendelsesrekke innenfor tidsintervallet [t;1,t;2] der t;1<t;2 hvis og bare hvis x logisk sett er kompatibelt med alt som kan tenkes å skje etter tidspunktet t;2 og utsagnet x dessuten er kompatibelt med alt som kan tenkes å skje før tidspunktet t;1. Vi skal bruke uttrykket "E(x,t;1,t;2)" som forkortelse for "x beskriver en hendelsesrekke innenfor tidsintervallet [t;1,t;2]" og skal i det følgende benytte den følgende definisjon:

(1) E(x,t;1,t;2) <-> (Aw)(wês(x) ->
(Aw')(Hist(w',[t;1,t;2])=Hist(w,[t;1,t;2]) ->w'ês(x)))

Man bør i denne forbindelse konsultere Definisjon 1 i §4 for definisjonen av uttrykket "Hist(w,X)" der X er et tidsintervall.

Er X en utsagnsmengde betegner C(X) den minste utsagnsmengden som inneholder X og som er lukket under uendelig konjunksjon og negasjon. La nå T være en teori ie. T Inkl U og anta at Δ er en utsagnsmengde. Vi sier da at T er komplett med hensyn på Δ hvis og bare hvis vi har for ethvert utsagn x som er med i Δ at xêk(T) eller Neg(x)êT og det dessuten er slik at teorien T er konsistent. Vi bruker "Comp(T,Δ)" som forkortelse for uttrykket "T er en komplett teori med hensyn på utsagnsmengden Δ". Vi har nå gitt presiseringer av de begrepene vi trenger for formuleringen av det mer omfattende og derfor svakere determinisme-begrep vi vil studere litt nærmere akkurat i denne paragrafen.

T er en deterministisk teori i verdenen w relativt til utsagnsmengden X hvis og bare hvis de følgende krav er oppfylt:

(i) TêPt(U) & XêPt(U) &wêI & T≠ø & X≠ø
(ii) (Au)(uêT -> CLov(u))
(iii) Det finnes tidspunkter t;1,t;2 og et utsagn u slik at
t;1<t;2 & True(w,u) & Comp(TU{u},C(X)) & E(u,t;1,t;2)

Dette avslutter definisjonen av det determinisme-begrep vi nå vil betrakte.

Vi har tidligere, i § 14, definert uttrykket "Ah;w(u,x,t)". Definisjonen var denne:

(1) Ah;w(u,x,t) <-> M;t(u,x,w)
&¬(Eu')(s(u')≠ø & s(u') Inkl s(u) & M;t(u',x,w))

I det følgende skal vi også betrakte den følgende premiss som innholdsmessig er relatert til antagelsen (#) som ble innført i §14.

(+) Ah;w(u,x,t).->.¬(Ey)(ED)(yêU&True(w,y) &
Cons({u,y}) & Cons({Neg(u),y}) & (Ax)(xêD->.CLov(x,w))& D≠ø &
[Neg(u)êk(DU{y})vuêk(DU{y})])

Representerer utsagnet u et handlingsalternativ som står åpent for individet x relativt til tidspunktet t i verdenen w synes det til en hvis grad rimelig å tenke seg at utsagnet u beskriver et mulig hendelsesforløp som eventuelt vil utspille seg etter tidspunktet t og som derfor ikke logisk sett kan sies å være implisert av noe utsagn som beskriver et hendelsesforløp som inntreffer før t. Dette uttrykkes av den følgende setning:

(++) Ah;w(u,x,t) -> (As)(At;1)(At;2)(t;1<t;2<t & E(s,t;1,t;2)
-> Cons({s,u}) &Cons({s,Neg(u)}))

Vi vil imidlertid ikke levere noe detaljert forsvar for (++) her. Kanskje tesen ikke lar seg forsvare. Det som imidlertid er hovedsaken er det følgende teorem som vi vil gi et bevis for:

TEOREM 17.1 *Anta T er en deterministisk teori i verdenen w med hensyn på utsagnsmengden X. Anta det følgende holder for alle u,t,x og w: M;t(u,x,w) -> uêC(X). Anta videre at (+) og (++) holder og at man benytter seg av den definisjonen som ble gitt ovenfor av Ah;w(u,x,t). Under disse forutsetninger finnes t;1,t;2êT der t;1<t;2 og hvor vi har:*

(a) (At)(t>t;2 -> ¬(Eu)(Ah;w(u,x,t))

(b) (At)(t<t;1 -> ¬(Eu)(Ah;w(u,x,t))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Fra det forhold at T er en deterministisk teori i verdenen w med hensyn på utsagnsmengden X følger i lys av den definisjonen vi har gitt ovenfor at

(1) wêI & T,X Inkl U & T≠ø &X≠ø

Videre følger eksistensen av to tidspunkter t;1,t;2 og et utsagn u der:

(2) t;1<t;2 & True(w,u) & Comp(TU{u},C(X)) & E(u,t;1,t;2)

Dessuten følger: (3) (As)(sêT -> CLov(s,w)). Anta for vilkårlig t at (4) t>t;2. Anta videre for reduktio ad absurdum at det finnes u;1 og x slik at: (5) Ah;w(u;1,x,t) Fra dette siste, (2) og (4), samt (++) følger: (6) Cons({u,u;1}) & Cons({u,Neg(u;1)}). Fra den andre forutsetningen i teoremet og vår definisjon av relasjonen Alt følger u;1êC(X). Fra dette, (2) og definisjonen av Comp følger:

(7) u;1êk(TU{u}) v Neg(u;1)êk(TU{u})

Fra (2), (3), (6) og (7) følger imidlertid :

(8) (Ey)(ED)(yêU&True(w,y) & D≠ø&
Cons({u;1,y}) & Cons({Neg(u;1),y}) & (Ax)(xêD->.CLov(x,w))&
[Neg(u;1)êk(DU{y}) v u;1êk(DU{y})])

Dette og (5) motsier imidlertid forutsetningen (+). Det følger at det ikke kan finnes u;1 og x slik at (5) og at derfor har ¬(Eu)(Ex)(Ah;w(u,x,t)). Dette viser at (a) i teoremet holder. Det andre punktet i satsen, (b), bevises på en helt analog måte. Her overlater vi detaljene til leseren. **Q.E.D**.

§18 Generaliseringer av en del begrepsdannelser.

Vi skal også i denne paragrafen se på visse avsvekkede versjoner av de begreper som vi hittil har betraktet.

La oss se på den følgene mulighet. Man kan tenke seg at man deler opp klassen av alle logisk mulige totaltilstander, Q, i en viss mengde av delklasser, la oss kalle den X. Er x et element i X vil altså x være en delmengde av Q. La oss si at en slik delmengde x av Q som er med i X foreligger realisert ved tidspunktet t i en verden w hvis og bare hvis den totaltilstanden som verdenen w er i ved tidspunktet t er med i mengden x. Det er da ikke logisk sett utelukket at man kan tenke seg et sett av kausallover Δ i en verden w som er slik at hvis man kjenner hvilken mengde sêX som foreligger realisert i w ved et gitt tidspunkt ja så kan man ved hjelp av dette og kausallovene i Δ slutte seg til hvilke andre elementer i X som

foreligger realisert ved ethvert annet tidspunkt. En mengde med kausallover med denne egenskap kunne man kalle deterministsk med hensyn på mengden X. Men det er klart at deterministiske teorier i denne forstand adskiller seg fra den type deterministiske teorier vi har betraktet tidligere. Hvis X er en partisjon av Q hvor alle de enkelte elementene i X har et kardinaltall som er forholdsvis stort kunne man kalle deterministiske teorier av denne typen for "makro-deterministiske", mens deterministiske teorier av den typen vi har betraktet tidligere kunne kalles for "mikro-deterministiske".

Nå kunne man tenke seg at selvom ingen mikrodeterministiske teorier holder i en verden w kunne det likevel være at en makro-deterministisk teori holder. Tidligere har vi vist at endel av setningene C1 - C5 (og varianter av disse) innebærer at man ikke samtidig kan anta at det finnes en mikro-deterministisk teori som holder i en verden w og at noen kan velge fritt ved et eller annet tidspunkt i denne verden. Spørsmålet er nå om noen av disse setningene også innebærer at makro-deterministiske teorier av visse typer er uforenelig med frihet på denne måten. Det er dette spørsmålet vi i noen grad ønsker å belyse i denne paragrafen.

Vi skal nå forsøke å gi en mer presis fremstilling av de ideene som vi så langt bare har skissert på en løselig måte. Vi starter med den følgende definisjon:

DEFINISJON 18.1: Vi sier at en mengde X er en partisjon av Q, mengden av alle logisk mulige totaltilstander, hvis og bare hvis X oppfyller de følgende krav:
(i) X er en mengde (ii) X Inkl Pt(Q) (iii) (Ay)(yêX -> y≠ø) (iv) UN(X)=Q
(v) (Ax)(Ay)(x,yêX & x≠y -> Sn(x,y)=ø).

Som man ser ved å betrakte denne definisjonen er en partisjon av Q en inndeling av Q i en mengde ikke-tomme, innbyrdes disjunkte mengder som samlet sett uttømmer Q.

DEFINISJON 18.2: Er a Inkl Q og a≠ø setter vi, om têT, St(a,t) = UNu(Mg(l(x,t): xêa))

St(a,t) er altså disjunksjonen av de diverse utsagnene l(x,t) ettersom x gjennomløper a. Sagt på en annen måte er St(a,t) det utsagnet som sier at en eller annen av totaltilstandene i mengden a foreligger realisert ved tidspunktet t. Vi har fra denne definisjonen at True(w,St(a,t)) <-> (Ex)(xêa & TL(x,w,t)). Leseren kan som en øvelse gi bevis for denne påstand.

I det følgende skal vi forutsette at X er en partisjon av Q. Dette gjelder også den følgende definisjon som generaliserer begrepene om historien til en mulig verden og historisk ekvivalens som vi allerede på et tidligere stadium har introdusert.

DEFINISJON 18.3: (i) X-historien til en verden w, i symboler "X-Hist(w)" er definert ved:
X-Hist(w) = (dtêT)((ia)(aêX &Hist(w);têa)).
(ii) Vi sier at to verdener w;1 og w;2 er X-ekvivalente hvis og bare hvis de har den samme X-historien.
(iii) Med en X-totaltilstand forstår vi rett og slett et element i X. Vi betegner klassen av alle X-totaltilstander over Q med "T(Q,X)".

La oss bemerke her at i stedet for å bruke det mer "klumsete" uttrykket "X-totaltilstand over Q" skal vi bruke det kortere uttrykket "X-tilstand" hvor dette ikke kan føre til noen misforståelser.

Vi skal nå geneneralisere det begrepet tilstandskomplett utsagnsmengde som vi tidligere har innført. Dette skjer ved den følgende definisjon:

DEFINISJON 18.4: Anta Δ Inkl U. Anta videre at X er en partisjon av Q. Vi sier da at Δ er en X-komplett teori hvis og bare hvis Δ oppfyller de følgende krav:

(i) Cons(Δ) & Δ≠ø (Δ må altså være konsistent)

(ii) La t være et vilkårlig tidspunkt og a en vilkårlig X-tilstand. Da gjelder:

St(a,t)êk(Δ) v Neg(St(a,t)) êk(Δ)

Dette krav kan også uttrykkes mer formalisert på den følgende måte:

(At)(Aa)(têT & aêT(Q,X) -> St(a,t)êk(Δ) v Neg(St(a,t)) êk(Δ))

Vi skal bruke uttrykket "CompS(Δ,X)" som forkortelse for det lengere uttrykket "Δ er en X-komplett teori". Dette avslutter definisjonen.

De begrepene som vi så langt har innført kan oppfattes som generaliseringer av de begrepene vi tidligere har innført. La man X=Mg({a}: aêQ) vil X være en partisjon av Q og de begrepene vi har innført vil i det vesentlige falle sammen med dem vi har omtalt tidligere.

Vi definerte tidligere funksjonen g;w(t;1,t;2). Vi skal nå generalisere denne funksjonen til X-tilstander. Dette skjer ved den følgende definisjon:

DEFINISJON 18.5: g;w(X,t;1,t;2) = SNu/têt[t;1,t;2]/(St(X-Hist(w)(t),t))

La oss i denne forbindelse bemerke at om vi har X= Mg({a}: aêQ) følger at

g;w(X,t;1,t;2) = g;w(t;1,t;2) om t;1,t;2êT.

De determinisme-begrepene som vi tidligere har innført kan nå uten større vanskeligheter relativiseres til X-tilstander. Vi definerte tidligere relasjonen DetM(Δ,w) hvor Δ var en utsagnsmengde og wêI. Vi skal nå relativisere dette begrep til X-tilstander hvor X er en eller annen partisjon av Q. Vi skal bruke uttrykket "DetM(X,Δ,w)" som en forkortelse for "Δ er en deterministisk teori i verdenen w relativt til partisjonen X" og definierer uttrykket presist slik:

DEFINISJON 18.6: DetM(X,Δ,w) <->

(i) (Ax)(xêΔ -> CLov(x,w)) & Δ≠ø

(ii) (As)(At)(sêX &têT -> ¬(St(s,t)êk(Δ)) &¬(Neg(St(s,t))êk(Δ))

(iii) (At)(têT -> (Et')(t'êT &t'>t &

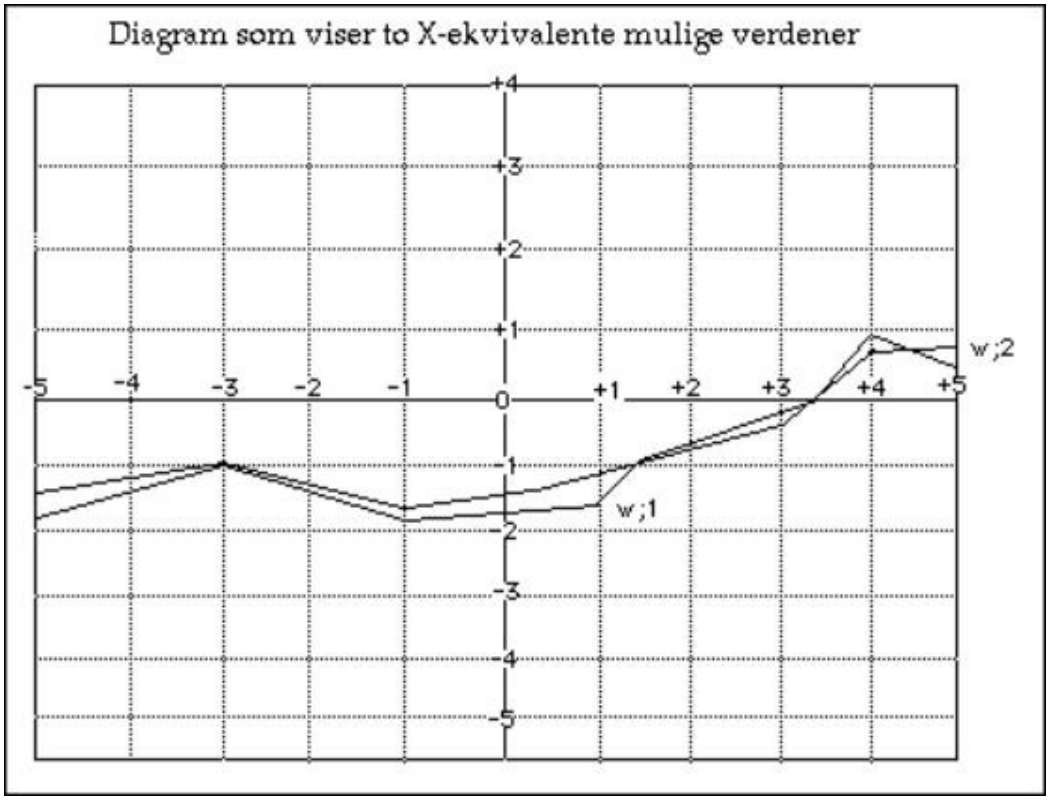
CompS(ΔU{g;w(t,t')}),X)

Poenget med å innføre denne definisjonen er at det logisk sett ikke behøver å finnes noen utsagnsmengde Δ og noen verden w slik at DetM(Δ,w), men det kan likevel finnes en partisjon X av Q , en utsagnsmengde Z og en verden w slik at Z er en deterministisk teori i w relativt til partisjonen X".

Anta X er en partisjon av Q. Vi skal definere hva vi mener med et X-utsagn. Klassen av X-utsagn betegner vi med med "Ut(X)". Vi sier at to verdener w;1,w;2 er X-historisk ekvivalente hvis og bare hvis de har den samme X-historie. X-historisk ekvivalens, eller kortere X-ekvivalens er nokså åpenbart en ekvivalens-relasjon som gir opphav til en partisjon av mengden av mulige verdener I. De enkelte elementer i denne partisjon av I skal vi kalle X-atomer. Ethvert utsagn hvor sannhetsmengden til utsagnet enten er null-mengden eller unionen av en mengde med X-atomer kaller vi for et X-utsagn.

Figuren på neste side er ment å gi en forenklet og helt uformell illustrasjon til endel av de momenter som er blitt nevnt ovenfor. Vi tenker oss en matematisk modell av vår teori hvor vi identifiserer klassen av mulige verdener I med funksjonene i Reell^Reell. Mengden av logisk mulige totaltilstander er representert ved mengden av de reelle tall og er på figuren illustrert ved hjelp av punktene på Y-aksen. Tidspunktene i denne modellen er også representert ved de mengden av de reelle tall og er anskueliggjort ved punktene på X-aksen. Partisjonen X av Q utgjøres av de ymse intervallene [x,x+1> der x gjennomløper mengden av de hele tall dvs mengden {..., -3,-2,-1,0,+1,+2,+3,...}. De to kurvene på figuren representerer to mulige verdener w;1 og w;2. Som man ser er disse X-historisk ekvivalente. Dette innebærer at de ved ethvert tidspunkt befinner seg i totaltilstander som hører med til den samme mengde i partisjonen X. Men de er selvfølgelig ikke historisk ekvivalente. Vi bemerker at w;1 og w;2 selvfølgelig vil være ekvivalente med hensyn til enhver grovere partisjon av Q enn X.

Før vi nå går videre og beviser hovedsatsen i denne paragrafen skal vi formulere enkelte hjelpesetninger som vi vil benytte i beviset for denne hovedsats. Den følgende hjelpesetningen følger nokså umiddelbart fra de definisjonene vi tidligere har gitt i denne paragraf og beviset er såpass enkelt at vi overlater det til leseren som en øvelse.



LEMMA 18.1: *(a) Vi har om X er en partisjon av Q at det følgende holder gitt at w og w' er to mulige verdener:*

X-Hist(w') = X-Hist(w) <-> (At)(têT ->
(ia)(aêX & Hist(w')(t) êa) = (ia)(aêX & Hist(w)(t) êa))

(b) Er X en partisjon av Q, w en mulig verden, aêPt(Q) og têT gjelder:
True(w,St(a,t)) <-> Hist(w)(t)êa

Den neste hjelpesetningen er noe mer substansiell og vi skal gi et detaljert bevis for den:

LEMMA 18.2: *Anta Δ Inkl U og at X er en partisjon av Q. Anta Δ er en X-komplett teori, mao. anta CompS(Δ,X). Da gjelder:*

(a) (At)(têT -> (E!a)(aêX &St(a,t)êk(Δ)))

(b) Er w;1 og w;2 to mulige verdener som er med i sannhetsmengden til SNu(Δ) dvs. har vi: w;1,w;2ês(SNu(Δ)) gjelder X-Hist(w;1) = X-Hist(w;2), de to verdenen er mao. X-historisk ekvivalente.

Den følgende hjelpesetning er et korollar til Lemma 2:

LEMMA 18.3: *Anta (i) at Δ Inkl U og at X er en partisjon av Q. Anta videre*

(ii) wêI & (Ax)(xêΔ -> True(w,x))

(iii) t,t'êT & CompS(ΔU{g;w(X,t,t')},X)

Da har vi: s(SNu(ΔU{g;w(X,t,t')})) Inkl Mg(w' : X-Hist(w') = X-Hist(w))

Vi gir først et bevis for Lemma 18.2.

Bevis for Lemma 18.2: Anta forutsetningene i setningen holder. Da har vi fra definisjonen av X-komplett teori og den forutsetning at Δ er en X-komplett teori at: (1) Cons(Δ) og desuten:

(2) (At)(Aa)(têT & aêX -> St(a,t)êk(Δ) v Neg(St(a,t))êk(Δ))

Vi ønsker nå å bevise:

(3) (At)(têT -> (E!x)(xêX & St(x,t)êk(Δ))

Først skal vi gi bevis for (A) (At)(têT -> (Ex)(xêX & St(x,t)êk(Δ)). Anta for reduktio ad absurdum at det finnes t slik at

(4) têT & (Ax)(xêX -> ¬[St(x,t)êk(Δ)])

Fra dette og (2) kan vi utlede: (5) (Ax)(xêX -> Neg(St(x,t))êk(Δ)) . Dette innebærer i sin tur at (6) SNu/xêX/(Neg(St(x,t)) êk(Δ). Siden Cons(Δ), dvs. det forhold at Δ er konsistent følger det at det må finnes en w der wês(SNu(Δ)). Fra dette og (6) følger åpenbart at (7) wês(SNu/xêX/(Neg(St(x,t))). Nå har vi siden wêI at Hist(w)(t) êa for noe aêX. Fra dette og Lemma 1 følger wês(St(a,t)). Imidlertid følger fra (7) og det forhold at aêX at wês(Neg(St(a,t))). Dette gir oss en motsigelse. Det kan derfor ikke finnes noe t slik at (4) holder. Fra dette følger riktigheten av (A). Vi må imidlertid også bevise :

(B) (At)(têT -> ¬(Ex;1)(Ex;2)(x;1,x;2êX & x;1≠x;2 & St(x;1,t)êk(Δ) & St(x;2,t)êΔ))

Anta igjen for reduktio ad absurdum at det finnes t, x;1, x;2 slik at:

(8) x;1,x;2êX & x;1≠x;2 & St(x;1,t)êk(Δ) & St(x;2,t)êΔ. Siden x;1,x;2êX og X er en partisjon av Q og x;1≠x;2 følger da at x;1Ωx;2=ø. Siden Δ er konsistent har vi at wêSNu(Δ) for noe w. Men i lys av (8) følger da at

(9) wês(St(x;1,t)) & wês(St(x;2,t)). Fra dette og Lemma 1 kan vi slutte at Hist(w)(t)êx;1 og Hist(w)(t)êx;2. Men dette er umulig siden x;1Ωx;2=ø. Dette viser at B tydeligvis holder. Dermed er punkt (a) i satsen bevist.

La oss gi bevis for det andre punktet i satsen. Anta w;1,w;2ês(SNu(Δ)) og at têT. I lys av det vi viste rett ovenfor følger det at det finnes en og bare en xêX slik at St(x,t)êk(Δ). Siden w;1,w;2ês(SNu(Δ)) innebærer dette at w;1ês(St(x,t)) og dessuten at w;2ês(St(x,t)). Fra disse to ting følger så ved hjelp av Lemma 1 at

Hist(w;1)(t)êx og at Hist(w;2)(t)êx. Dette innebærer i sin tur det følgende:

(ia)(aêX & (Hist(w;1)(t))êa) = (ia)(aêX & (Hist(w;2)(t))êa)

Men t var et vilkårlig element i T. Fra dette og Lemma 1 følger derfor at X-Hist(w;1) = X-Hist(w;2). Dette avslutter beviset for Lemma 2. **Q.E.D.**

Det ble nevnt ovenfor at Lemma 18.3 kunne oppfattes som et korollar til Lemma 18.2. Vi gir et bevis for Lemma 18.3:

Bevis for Lemma 18.3: Anta forutsetningene i Lemma 18.3 holder. Vi vil først vise at vi da har at (1) wês(g;w(X,t,t')). Nå har vi per definisjon at dette innebærer at:

(2) (At,1)(t;1ê[t,t'] -> wês(St(X-Hist(w)(t;1),t;1))) I lys av definisjonen av funkjonen St ser man at (2) holder hvis og bare hvis man har:

(3) (At,1)(t;1ê[t,t'] -> wês(UNu(Mg(l(x,t;1): xê(ia)(aêX & Hist(w)(t;1)êa)))

Dette holder i sin tur hvis og bare hvis vi har:

(4) (At,1)(t;1ê[t,t'] -> (Ey)(TL(y,w,t;1) & yê(ia)(aêX & Hist(w)(t;1)êa)))

For å vise at (1) holder vil det derfor være tilstrekkelig å vise at (4) holder. Anta derfor for for vilkårlig t;1 at t;1ê[t,t'] og at w er en mulig verden. I følge TL2 og TL4 i §3 finnes det da en og bare en totaltilstand s;1 hvor vi har TL(s;1,w,t;1). Vi har da per definisjon av Hist at Hist(w)(t;1)=s;1. Videre vil det, siden X er en partisjon av Q finnes nøyaktig en mengde aêX slik at s;1êa. Dette innbærer at vi har: TL(s;1,w,t;1) & s;1ê(ia)(aêX & Hist(w)(t;1)êa). Men fra dette følger helt klart at (Ey)(TL(y,w,t;1) & yê(ia)(aêX & Hist(w)(t;1)êa)). Siden t;1 var et vilkårlig element i [t,t'] holder derfor (4). Dette innebærer at (1) og holder.

Fra den andre forutsetningen i Lemma 3 har vi at wês(SNu(Δ)). Dette og (1) innbærer at vi må ha: (5) wês(SNu(ΔU{g;w(X,t,t')})). Fra den tredje forutsetningen i Lemma 3 samt Lemma 2, punkt (b), kan vi trekke den slutning at : (6) (Aw,1)(Aw;2) (w;1,w;2ês(SNu(ΔU{g;w(X,t,t')})) -> X-Hist(w;1)=X-Hist(w;2)). Fra (5) og (6) følger:

(7) (Aw')(w'ês(SNu(ΔU{g;w(X,t,t')})) -> X-Hist(w')=X-Hist(w)

Men dette sier nøyaktig det samme som konsekventen i Lemma 3. Dette avslutter vårt bevis for denne hjelpesetningen. **Q.E.D.**

Vi har nå kommet frem til det som er hovedsaken i denne paragrafen, nemlig å gi et bevis for den følgende sats:

TEOREM 18.1: *Anta (i) X er en partisjon av Q. Anta videre at*

(ii) M;t(u,x,w) -> uêUt(X) holder for alle t, u, x. Anta videre at

(iii) betingelsen C4 holder og at (iv) DetM(X,Δ,w). Da gjelder følgende:

(At;1)(t;1êT -> (Et')(t'≥t;1 & (At)(t>t'->

¬(Eu)(Ex)(M;t(u,x,w) & M;t(Neg(u),x,w))))).

Kommentar: Sammenligner man dette teoremet med Teorem 15.6 ser man at det er en sterk analogi mellom de to satsene. La oss først bemerke at om vi i tillegg til forutsetningene i satsen ovenfor også antar at det følgende holder:

M;t(u,x,w) & LK(u',u) -> M;t(u',x,w),

og vi ellers bruker den definisjonen vi tidligere har gitt av "Fri(x,t,w)", kan konklusjonen omformes til:

(At;1)(t;1êT -> (Et')(t'≥t;1 & (At)(t>t'-> ¬(Ex)(Et)(Fri(x,t,w))))

mao. den samme konklusjonen som i Teorem 15.6.

Når det gjelder forutsetningen (ii) er denne nødvendig. Vi må altså forutsette at dersom u beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w så er u et X-utsagn. Studerer man beviset nærmere skulle det fremgå at C4 er tilstrekkelig for å gjennomføre det. Saken er imidlertid den at betingelsen C2 ikke synes å være tilstrekkelig. Hvis man derfor mener det er *umulig* å tenke seg situasjoner der det finnes en partisjon X av Q, hvor vi har DetM(X,Δ,w) og at (ii) holder generelt for alle u, ,t og x, og hvor det samtidig er mulig for en person å velge fritt, må man altså basere seg på et sterkere prinsipp enn C2. En nærmere analyse av beviset nedenfor viser at også C4.3, som ble nevnt i §14 er tilstrekkelig.

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Fra forutsetning (iv) og den definisjonen som ble gitt ovenfor av "DetM(X,Δ,w)" følger:

(1) (Ax)(xêΔ -> CLov(x,w)) & Δ≠ø

(2) (As)(At)(sêX &têT -> ¬(St(s,t)êk(Δ)) & ¬ (Neg(ST(s,t))êk(Δ)))

(3) (At)(têT -> (Et')(t'≥t & Comp(ΔU{g;w(X,t,t')},X)))

Anta for vilkårlig t;1 at (4) t;1êT. Da har vi fra (3) at det finnes t' der (5) t'≥t;1 og hvor vi videre har: (6) Comp(ΔU{g;w(X,t,t')},X). Det vil nå være tilstrekkelig å bevise:

(*) (At)(t>t'-> ¬(Eu)(Ex)(M;t(u,x,w) & M;t(Neg(u),x,w)))

Anta for reduktio ad absurdum at det motsatte av (*) holder, dvs. anta at det finnes t;2, u, x slik at (7) t;2>t' & M;(t;2)(u,x,w) & M;(t;2)(Neg(u),x,w)). Fra dette og den tredje forutsetningen, C4, følger:

(8) ¬(Ex)(xêU& True(w,x)&(Aw)(wês(x).->.
(Aw')(Hist(w);t;2 =Hist(w');t;2.->. w'ês(x))) &(EΔ)(Δ Inkl U &
(Ax)(xêΔ.->.CLov(x,w)) & [uêk(ΔU{x}) v Neg(u)êk(ΔU{x})]))

Sett nå per definisjon: (9) x;0= g;w(X,t,t'). Fra (6) og definisjonen av Comp har vi:

(10) (At)(têT & aêT(X,Q) -> St(a,t)êk(ΔU{x;0}) v Neg(St(a,t))êk(ΔU{x;0}))

Fra (6) og Lemma 3 følger:

(11) s(SNu(ΔU{g;w(X,t,t')})) Inkl Mg(w' : X-Hist(w') = X-Hist(w))

Nå har vi at Mg(w' : X-Hist(w') = X-Hist(w)) er mengden av alle de verdener som er X-historisk ekvivalente med w, mao. har vi, dersom vi setter per definisjon:

(12) q= Mg(w' : X-Hist(w') = X-Hist(w))

at q er det vi kalte et X-atom. Fra den andre forutsetningen i teoremet har vi i lys av (7) at u og Neg(u) er X-utsagn. Dette innebærer at det finnes to mengder, la oss kalle dem Y;1 og Y;2 som bare inneholder X-atomer slik at s(u) =UN(Y;1) og s(Neg(u)) = UN(Y;2). Siden (13) s(Neg(u)) = I - s(u) har vi at

(14) s(u) =UN(Y;1) & s(Neg(u)) = I-UN(Y;1) Siden q er et X-atom og Y;1 er en mengde med X-atomer har vi (15) q Inkl s(u) v q Inkl s(Neg(u))

Dette (11), (12) og definisjonen av konsekvenssystem innebærer, når man erindrer at x;0= g;w(X,t,t') at (16) uêk(ΔU{x;0}) v Neg(u)êk(ΔU{x;0}) Fra (16) og (1) følger :

(17) (EΔ)(Δ Inkl U & (Ax)(xêΔ-> Clov(x,w)) & Δ≠ø &
uêk(ΔU{x;0}) v Neg(u)êk(ΔU{x;0}))

Nå har vi vist tidligere, nærmere bestemt i beviset ovenfor for Lemma 3 at wê(g;w(X,t,t')). Det følger derfor i lys av (9) at vi har : (18) wês(x;0).

Vi tar nå sikte på å bevise det følgende:

(‡) (Aw')(w'ês(x;0)->(Aw")(Hist(w");(t;2) = Hist(w');(t;2) -> w"ês(x;0)))

Anta derfor for vilkårlig w',w" at (19) w'ês(x;0) & Hist(w");(t;2) = Hist(w');(t;2). Det siste innebærer at (20) (At")(t"<t;2 -> Hist(w")(t")=Hist(w')(t")) Fra (19) følger selvfølgelig i lys av definisjonen (9) at w'ês(g;w(X,t,t')). I lys av de fire første trinnene i beviset for Lemma 3 har vi:

(21) (Aw')(w'ês(g;w(X,t,t')) <-> (At,1)(t;1ê[t,t'] ->
(Ey)(TL(y,w',t;1) & yê(ia)(aêX & Hist(w)(t;1)êa))))

Siden vi videre har TL(y,w,t) <-> y=Hist(w)(t) for alle y, w og t følger det at (21) er ekvivalent med:

(22) (Aw')(w'ês(g;w(X,t,t')) <-> (At,1)(t;1ê[t,t'] ->
Hist(w')(t;1)ê(ia)(aêX & Hist(w)(t;1)êa))))

Fra (22) og det at w'ês(g;w(X,t,t')) følger:

(At,1)(t;1ê[t,t'] ->Hist(w')(t;1)ê(ia)(aêX & Hist(w)(t;1)êa))))

I lys av (19) og det forhold at t;2>t' følger da:

(At,1)(t;1ê[t,t'] -> Hist(w")(t;1)ê(ia)(aêX & Hist(w)(t;1)êa))))

I lys av (22) slutter vi fra dette at w"ês(g;w(X,t,t'))=s(x;0). Disse overveielsene viser at (‡) holder. Fra (17), (18) og (‡) følger:

(Ex)(xêU &wês(x) & (Aw)(wês(x)-> (Aw')(Hist(w');(t;2)=Hist(w);(t;2)-> w'ês(x))) &
EΔ)(Δ Inkl U & (Ax)(xêΔ-> Clov(x,w)) & Δ≠ø &
(uêk(ΔU{x;0}) v Neg(u)êk(ΔU{x;0}))))

Dette motsier imidlertid åpenbart (8). Dette viser at (*) holder og avslutter dermed vårt bevis for satsen. **Q.E.D.**

Vi har i denne paragrafen antydet hvordan alle de determinisme-begrepene vi innførte i §8 kan relativiseres til partisjoner X av mengden av alle logisk mulige totaltilstander Q. Imidlertid har vi ikke gjort dette i detalj for alle de determinisme-begrepene som ble innført i §8, men begrenset oss til å vise hvordan det kan gjøres i forbindelse med konstruksjonen "Δ er en deterministisk teori i verdenen w". Men det kan også gjøres i de andre tilfellene.

På dette vis får man en ny, og mer omfangsrik familie med determinisme-begreper. Spørsmålet oppstår derfor om i hvilken grad determinisme i noen av disse nye betydningene er uforenelige med frihet. Vi har ovenfor bevist et resultat av relevans. Men også en rekke andre satser kan bevises i denne forbindelse. Imidlertid er det ikke mulig innenfor rammen av dette arbeid å komme detaljert inn på dette her.

§19 Oppsummering og konklusjon.

Vi har i dette skrift detaljert beskrevet, og presist definert, første-ordens teorien DF. Dette har skjedd i to etapper. Den første delen av teorien, E;3+[HP1], ble hovedsakelig introdusert i §3. I §4 - §7 innførte vi så en rekke begreper av mer elementær natur i denne delteorien av DF og beviste endel teoremer av betydning for utviklingen i de etterfølgende paragrafer. I §8 innførte vi så de determinisme-begrepene som senere i arbeidet har spilt en så fremtredende rolle.

Når vi har bestrebet oss på å fremstille denne delen av teorien så nøye som vi faktisk har gjort det, er det flere grunner til dette ved siden av det faktum at den har relevans for våre betraktninger senere i dette arbeid. For det første blir det lettere for enn kritiker å peke på hvilke deler av teorien det er vedkommende finner uakseptable om man fremstiller en teori såpass eksplisitt som vi har gjort. For det andre finner vi denne delen av teorien interessant i seg selv og har ønsket å legge forholdene til rette for en ytterligere utforskning og undersøkelse av den. Det er altså etter vår mening gode grunner til å tro at teorien kan utvikles langt mer enn det vi har gjort her.

I §13 utvidet vi teorien E;3+[HP1] med ytterligere primitive predikater og ikke-logiske aksiomer slik at vi fikk den fulle teorien DF. Fra definisjonen av DF fremgår det at handlingsteorien HT, som ble undersøkt i Rognes [8], er en delteori av DF. I §13 formulerte vi også en rekke definisjoner av frihet innenfor rammen av denne mer omfattende teori og studerte forholdet mellom disse definisjonene. I §14 gikk vi så et skritt videre og formulerte en rekke "tilleggs-premisser" av relevans for våre senere argumenter. I denne paragrafen viste vi også en rekke satser om implikasjons-forholdene mellom disse setningene.

I §15 presenterte vi presenterte vi så ni teoremer om uforeneligheten mellom determinisme og frihet. Disse teoremene, sammen med de korollarene vi antydet, utgjør hovedresultatene i dette arbeid. Imidlertid skulle det være klart for en som setter seg grundig inn i §15 at det ikke er helt lett å oppsummere disse resultatene i en enkelt formel. Men hvis man aksepterer noen av de tilleggspremissene som vi nevnte, f. eks. C4 er det rimelig å si at vi har vist at determinisme og frihet er logisk sett uforenelige i visse betydninger som det er rimelig å tillegge disse to ord.

Vi har altså konsentrert oss om spørsmålet om frihet og determinisme er logisk sett forenelige i dette arbeidet. Det er imidlertid viktig å understreke at fra den påstand at frihet er

uforenelig med determinisme følger ikke i seg selv at mennesket er fritt. Det er ikke noe logisk sett direkte selvmotsigende i den tanke at universet er fullstendig determinert, at frihet er uforenelig med determinisme og at frihet er en ren illusjon. Heller ikke er det noen selvmotsigelse, for alt det vi har vist, å hevde at determinisme er en fullstendig illusjon, at frihet er fullstendig uforenelig med determinisme og samtidig hevde at mennesket er ufritt. Endelig er det selvfølgelig intet til hinder, rent logisk sett, for at determinisme er en illusjon og at frihet faktisk er et reelt fenomen. De nevnte forhold kan fremstilles noe mer oversiktlig slik: La A være den påstand at alle hendelser i universet er fullstendig determinert og la B være den påstand at minst en person ved et eller annet tidspunkt kan velge fritt mellom minst to handlingsalternativer. Det vil da være fire muligheter: A&B, A&¬B, ¬A&B,¬A&¬B. Hvis man viser at bare den første muligheter er utelukket, har man ikke dermed vist at de tre resterende muligheter er utelukket.

Er så mennesket faktisk fritt? Kan vi ved forskjellige anledninger faktisk velge fritt mellom forskjellige alternativer? Vår egen mening er at dette selvfølgelig er tilfelle. Men dette er ingen tese, bare uttrykk for en mening som i og for seg ikke spiller noen rolle for de satser, argumenter og bevis vi har fremlagt i dette arbeid. Og det er en oppfatning som hverken trengs eller har spesiell relevans for å løse de problemer av mer interessant art som oppstår hvis man ytterligere ønsker å utarbeide teorien DF.

Er det slik at det faktisk finnes kausallover? Og om man aksepterer at det finnes kausallover, er det da slik at verdensforløpet er determinert ned til den minste detalj av disse? Det er selvfølgelig fullt forenelig med DF å anta at det finnes kausallover. Det kan også forekomme en problematisk hvordan genuine handlingsalternativer kan foreligge i en gitt situasjon om det ikke i den ytre verdens hendelser var en meget stor grad av kausalsammenheng og predikerbarhet. Dette innebærer imidlertid ikke at verden er fullstendig determinert i noen av de betydninger vi har angitt. Aksepterer man imidlertid noen av de forutsetningene vi nevnte i §14 og samtidig mener at mennesket er fritt, vil det, hvis våre hovedresultater er riktige, være visse former for determinisme som man ikke kan akseptere.

Frihet og determinisme er et stort og omfattende emne. Man kan nærme seg det fra forskjellige synsvinkler, f. eks. en historisk synsvinkel. En rekke store filosofer, Hobbes, Spinoza, Leibniz, Hume og Kant synes å ha ment at determinisme i en eller annen forstand kan la seg forene med frihet. Det samme gjelder mange av vårt århundredes filosofer som Moore, Ayer, Strawson og Davidson. Man kan derfor spørre om hvordan deres standpunkter er relatert til de argumenter som har blitt fremlagt i dette arbeidet angående uforeneligheten av disse to ting. Når vi ikke har skrevet mer detaljert om dette, bortsett fra visse kommentarer i forbindelse med Moore, er det selvfølgelig ikke av manglende respekt for disse tenkere, men hovedsakelig av de følgende to grunner: For det første er det en krevende oppgave å formulere og klargjøre disse filosofers syn på frihetsproblematikken slik at man utbytterikt kan sammenligne deres synspunkter med de synspunkter som er fremlagt her. Den andre grunnen er at et slikt projekt ville ha vært altfor omfangsrikt og stort. Det ville helt ha sprengt den ramme som vi har satt opp for dette arbeid.

***

Appendix I

Notasjon

§0 Om notasjonen i dette skrift.

I dette tillegget gir vi hovedsakelig en oversikt over den logiske og mengdeteoretiske notasjon som brukes i dette skrift. Vi anbefaler at leseren tar en kopi av disse sidene og har dem oppslått ved siden av skriftet ved gjennomlesningen. Dette vil spare en for en masse bryderi med stadig å slå opp når man støter symboler som virker ukjente.

For det første bruker vi den følgende notasjon i forbindelse med subskripter og superskripter: La a og b være to uttrykk. Uttrykket som man får ved å føye til b som en subskript til a betegner vi med "a;b". Vi setter altså et semikolon mellom det uttrykket b som skal føyes til som subskript og det uttrykket a som b er subskript til. Vi bruker paranteser for å fjerne mulige flertydigheter i denne forbindelse. Er a,b og c tre uttrykk vil "a;(b;c)" betegne det uttrykket vi får når man føyer til uttrykket c som en subskript til b og dernest føyer dette resultatet til som en subskript til a.

Når det gjelder superskripter benytter vi oss av en lignende regel. Er a og b to uttrykk betegner "a`b" det uttrykket vi får når b skrives som en superskript til uttrykket a. Også her brukes paranteser for å fjerne flertydigheter. Ønsker man f.eks. å føye til uttrykket "x+2" som en superskript til uttrykket "F(x)" skriver vi dette på den følgende måte: "F(x)`(x+2)". Vil man skrive "(x+2),f(y)" som en superskript til f.eks. uttrykket a skriver man "a`((x+2),f(y))". Er a,b og c tre uttrykk vil a;(b`c) betegne det uttrykket som man får når man føyer til "b`c" som en subskript til a. "b`c" betegner i sin tur det uttrykket som resulterer når man føyer til c som en superskript til uttrykket b.

Når det gjelder vår bruk av variabeltegn bemerker vi følgende. De offisielle variabeltegnene er tegnene i rekken "x", "y", "z", "w", "x'", "y'", "z'", "w'", "x'",... ad inf. Men i en rekke situasjoner er det gunstig å tillate seg å bruke spesielle variabeltegn som bare har objektene i visse mengder som verdier. Vi skal f.eks. bruke "w;1", w;2", "w;3" , ... etc. som variabeltegn som bare har mulige verdener som verdier. Videre bruker vi "t;0", "t;1", "t;2", ... som variabeltegn som bare tar elementer i klassen av tidspunkter som verdier. Vi nevner også at vi hvis det ikke ellers fremgår av sammenhengen at vi mener noe annet at tegnene "m", "n", "k", "j", og "i" , eventuelt påført talltegn som subskripter vil bli brukt som variabeltegn som tar naturlige tall som verdier.

Når det gjelder den notasjon vi benytter gir den følgende liste en fullstendig oversikt. Til venstre i hver rad på denne listen er oppført det symbolske uttrykk som benyttes som forkortelse for det uttrykket som er oppført til høyre.

§1 Oversikt over de logiske symboler i setningslogikken og predikatlogikken.

Symbol:	Hvilket uttrykk symbolet brukes som forkortelse for:
p -> q	"Hvis p så q"
¬p	"Ikke p"
¬p	"Ikke p"
p&q	"p og q"
p h&h q	"p hvis og bare hvis q"
p <-> q	"p hvis og bare hvis q"

pvq	"p eller q"
(Ax)	"For alle objekter x er det slik at"
(Ex)	"For minst et objekt x er det slik at"
x=y	"x er identisk med y"

§2 Oversikt over de viktigste symbolene i mengdelæren.

xêy	"x er et element i mengden y"
Mg(x:F(x))	"Mengden av alle objekter x som er slik at F(x)"
c(x)	"Komplementet til mengden y"
Sn(x,y)	"Snittet av mengden x og mengden y"
xΩy	"Snittet av mengden x og mengden y"
xUy	"Unionen av mengden x og mengden y"
Un(x,y)	"Unionen av mengden x og mengden y"
x Inkl y	"x er inkludert i y"
x SInkl y	"x er strengt inkludert i y"
<x,y>	"Det ordnete par som har x som første og y som den andre komponent
UN(x)	"Unionen av alle elementene i mengden x"
SN(x)	"Snittet av alle elementene i mengden x"
{x}	"Mengden som bare inneholder elementet x"
V	"Den universelle mengde"
ø	"Nullmengden"
SN/x,n,m/(F(x))	"Snittet av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper tallrekken fra og med n til og med m"
SN/xêA/(F(x))	"Snittet av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper elementene i mengden A"
UN/x,n,m/(F(x))	"Unionen av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper tallrekken fra og med n til og med m"
UN/xêA/(F(x))	"Unionen av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper elementene i mengden A"
Prod(x,y)	"Det cartesiske produkt av mengden x og mengden y"
xXy	"Det cartesiske produkt av mengden x og mengden y"
SN/x,j,∞/(F(x))	"Snittet av mengdene F(x) ettersom x gjennomløper rekken av naturlige tall fra og med j og oppover i det uendelige"
Pt(x)	"Potensmengden til x"
Rel(x)	"x er en relasjon"
Func(x)	"x er en funksjon"
Dom(x)	"Domenet til x"
Rgn(x)	"Verdiområdet til x"
Cor(x)	"x er en korrelasjon"
f ‘x	"Verdien til funksjonen f for argumentet x"
f(x)	"Verdien til funksjonen f for argumentet x"
(dx)(f(x))	"Den funksjonen som til ethvert objekt x tilordner verdien til funksjonen f for argumentet x"
(dxêC)(f(x))	"Den funksjonen som til ethvert objekt x som er med i mengden C tilordner f(x)"
f: x -> y	"f er en funksjon som avbilder mengden x inn i mengden y"

f: x -(1-1)->y	"f er en en-entydig funksjon som avbilder mengden x inn i mengden y"
f: x-(1-1,på)->y	"f er en en-entydig funksjon som avbilder mengden x på mengden y"
F"x	"Bildet av mengden x over relasjonen F"
Mng(x)	"x er en mengde"
x-y	"Differansen mellom mengde x og mengden y"
Cnv(x)	"Den konverse relasjon til x"
x`-1	"Den konverse relasjon til x"
Ur(x)	"x er et urindivid"
x « y	"x er av mindre mektighet enn y"
x «= y	"x er mindre eller likemektig med y"
x ≈ y	"x har samme mektighet som y"
Ca(x)	"Kardinaltallet til mengden x"
∑/xeA/(F(x))	"Summen av diverse tallene F(x) ettersom x gjennomløper mengden A"
∏/xeA/(F(x))	"Produktet av de diverse tallene F(x) ettersom x gjennomløper mengden A"
Nat	"Mengden av de naturlige tall"
Rat	"Mengden av de rasjonale tall"
Reell	"Mengden av de reelle tall"
RE	"Mengden av de reelle tall"
Exp(x,y)	"Mengden av alle funksjoner hvor domenet er mengden X og hvor verdiområdet er inkludert i mengden X"

§3 Oversikt over de viktigste symbolene som brukes i teorien om presise deskriptive utsagn.

SNu(x)	"Det utsagnet som er konjunksjonen av utsagnene i utsagnsmengden x"
UNu(x)	"Det utsagnet som er disjunksjonen av utsagnene i utsagnsmengden x"
C(x,y)	"Kondisjonalutsagnet som har utsagnet x som antesedent og utsagnet y som konsekvent"
K(x,y)	"Konjunksjonen av utsagnet x og utsagnet y"
D(x,y)	"Disjunksjonen av utsagnet x og utsagnet y"
Neg(x)	"Negasjonen av utsagnet x"
s(x)	"Sannhetsmengden til utsagnet x"
True(w,x)	"w er en logisk mulig verden hvor utsagnet x er sant"
U	"Mengden av alle presise deskriptive utsagn"
I	"Mengden av alle logisk mulige verdener"
MV(x)	"x er en logisk mulig verden"
MI(x)	"x er et logisk mulig individ"
s;-1(x)	"Det utsagnet som har mengden x som sin sannhetsmengde"
s	"Funksjonen som til ethvert utsagn tilordner utsagnet det som er sannhetsmengden til det."
k(x)	"Konsekvensmengden til utsagnsmengden x"
LK(x,y)	"x er en logisk konsekvens av utsagnet y"
LKm(x,y)	"x er et utsagn som er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden y"

Cons(x)	"x er en konsistent utsagnsmengde"

§4 Oversikt over de viktigste symbolene som brukes i egenskapsteorien E;3

D	"Mengden av alle mulige individer"
At(x,y)	"x er en egenskap av grad y"
H(x,y,w)	"x har egenskapen y i verdenen w"
Ekst;w(x)	"Ekstensjonen til egenskapen x i verdenen w"
Ekst(x)	"Ekstensjonsfunksjonen til egenskapen x"
Da;n(x,y)	"Disjunksjonen av den n-ære egenskapen x og den n-ære egenskapen y"
Ka;n(x,y)	"Konjunksjonen av den n-ære egenskapen x og den n-ære egenskapen y"
Nega;n(x)	"Negasjonen av den n-ære egenskapen x"

§5 Oversikt over noen av de viktigste symbolene som brukes i teorien DF

P(x)	"x er en person"
M;t(a,x,w)	"Utsagnet a beskriver et forhold det står i x's makt å realisere relativt til tidspunktet t i verdenen w"
Br(a,x,w)	"Utsagnet a beskriver et forhold personen x realiserer i verdenen w"
Bas(C,T)	"C er en mengde med teorier som utgjør en basis for teorifamilien T"
Q(w,x,t)	"Handlingspotensialet til personen x ved tidspunktet t i verdenen w"
C(w,x,t)	"Handlingsmulighetene til personen x ved tidspunktet t i verdenen w"
Alt;w(h,x,t)	"h er et handlingsalternativ som står åpent for personen x ved tidspunktet t i verdenen w"
x<y	"Tidspunktet x kommer før tidspunktet y"
Tp(x)	"x er et tidspunkt"
Aktuell(x)	"x er den aktuelle verden"
Akt	"Den verden som faktisk foreligger realisert" "Den aktuelle verden"
TL(x,w,t)	"x er en totaltilstand som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w"
CLov(x,w)	"x er en kausallov som gjelder i verdenen w"
Dist(x,t;1,t;2)	"x er et reellt tall som angir avstanden mellom tidspunktet t;1 og tidspunktet t;2"
T	"Mengden av alle tidspunkter"
Q	"Mengden av alle logisk mulige totaltilstander"
l(s,t)	"Det utsagnet som sier at totaltilstanden s foreligger realisert ved tidspunktet t"
G(f)	"Mengden av alle de mulige verdener hvor tilstandsdistribusjonen f foreligger realisert"
Hist(w)	"Historien til verdenen w" "Den tilstandsdistribusjonen som foreligger realisert i verdenen w"

Tot(t,w)	"Den totaltilstanden som foreligger realisert ved tidspunktet t i verdenen w"
w;1 ~ w;2	"Verdenen w;1 er historisk sett identisk med verdenen w;2"
Hist(w);t	"Historien til verdenen w opp til, men ikke inkludert tidspunktet t"
Rest(f,X)	"Restriksjonen av funksjonen f til mengden X"
Hist(w,X)	"Historien til verdenen w begrenset til mengden av tidspunkter i X"
Ekv(X,w;1,w;2)	"Verdenen w;1 er X-ekvivalent med verdenen w;2"
Ek(X,w;1)	"Mengden av de verdener som er X-ekvivalente med verdenen w;1"
E(X)	"Mengden av X-ekvivalensklasser over mengden av mulige verdener"
CompS(T)	"T er en tilstandskomplett utsagnsmengde"
g;w(t;1,t;2)	"Det utsagnet som beskriver totalhistorien til verdenen w i tidsintervallet fra og med t;1 til og med t;2"
DetM(Δ,w)	"Δ er en deterministisk teori i verdenen w"
DetM(Δ,w,a)	"Δ er en deterministisk teori i verdenen w med parameter a"
Det(X)	"X er en deterministisk teori"
Det(X,w,t)	"X en deterministisk teori i w relativt til tidspunktet t"
SDet(X)	"X er en *strengt* deterministisk teori"
ß(h)	"Det utsagn som hevder at hendelsen h foreligger realisert"
HEt(h;1,t,w)	"h;1 er en hendelse i snever forstand som inntreffer etter tidspunktet t i verdenen w"
HFør(h;2,t;1,w)	"h;2 er en hendelse i snever forstand som inntreffer før tidspunktet t:1 i verdenen w."
CImp(h;2,h;1,w)	"Hendelsen h;2 impliserer kausalt hendelsen h;1 i verdenen w"
FH(w,t)	"Utsagnet som gir en fullstendig beskrivelse av historien i verdenen w opp til og inkludert tidspunktet t"

Referanser

Referanser

Moore [1], Moore, George Edward, *Etikk (Oversatt av Eivind Storheim),* (1964), Tanum Forlag, Oslo
Rognes [1], Rognes, Morten , *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og og mengdelære* , (1985) Upublisert maskinskrevet manuskript.
Rognes [2], Rognes, Morten , *En teori om presise deskriptive utsagn* , (1985) Upublisert maskinskrevet manuskript
Rognes [3], Rognes, Morten , *Endel grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn* , (1987) Upublisert maskinskrevet manuskript
Rognes [4], Rognes , Morten , *Egenskaper. Del I* , (1986) Upublisert maskinskrevet manuskript.
Rognes [5], Rognes, Morten , *Egenskaper. Del II. Bevis for teoremer* , (1987) Upublisert maskinskrevet manuskript.
Rognes [6], Rognes, Morten , *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier* , (1985) , Upublisert maskinskrevet manuskript.
Rognes [7], Rognes, Morten , *Et sammendrag av en teori om egenskaper og presise deskriptive utsagn* , (1985) Upublisert maskinskrevet manuskript.
Rognes [8], Rognes, Morten, *En teori om handlinger og handlingsalternativer*, (1993), Upublisert maskinskrevet manuskript.
von Wright [1], von Wright, Georg Henrik, *Explanation and Understanding*, (1971), Routlegde & Kegan Paul, London
von Wright [2], von Wright, Georg Henrik, *Causality and Determinism*, (1974), Columbia University Press, London New York